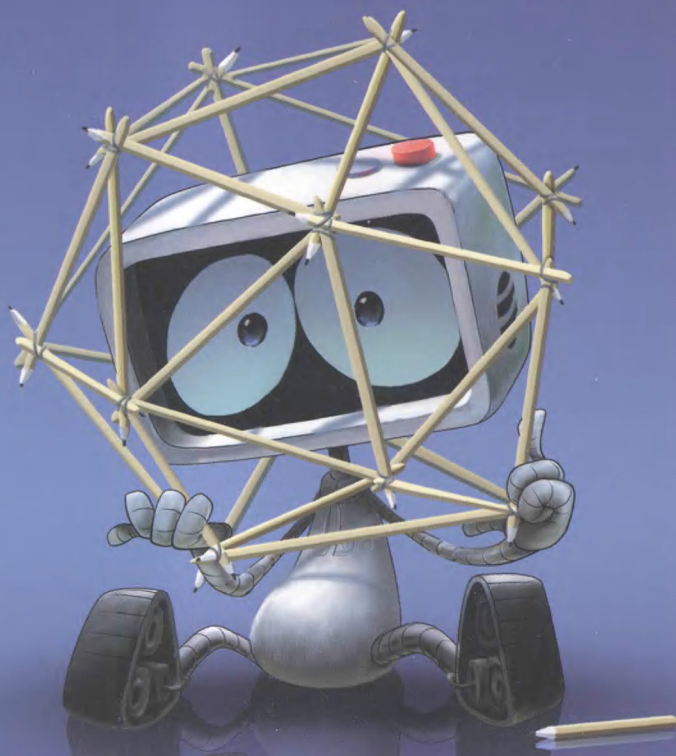


БИБЛИОТЕЧКА
ЖУРНАЛА
КВАНТИК



СТО ГРАНЕЙ
МАТЕМАТИКИ

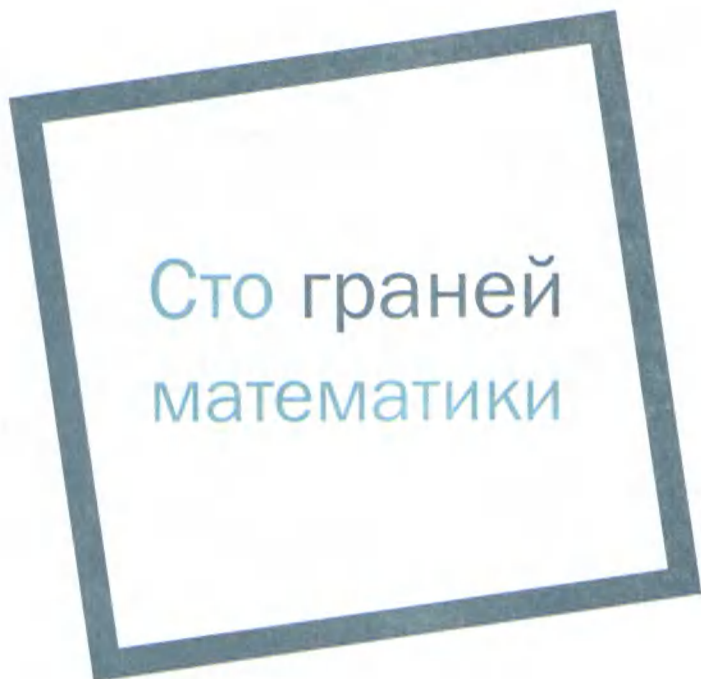
М. А. ЕВДОКИМОВ

С РИСУНКАМИ Н. Н. КРУТИКОВА



Библиотечка журнала «Квантик»

М. А. Евдокимов



с рисунками Н. Н. Крутикова

Издательство МЦНМО

Москва, 2018

УДК 51 (023)

ББК 22.1

Е 15

Евдокимов М. А.

Е 15 Сто граней математики. — М.: МЦНМО, 2018. — 176 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-1269-1

В этой книге собраны сто тест-задач с подробными решениями, комментариями и иллюстрациями.

Все задачи для простоты снабжены вариантами ответов, из которых надо выбрать верный, но часто правильный ответ совсем не тот, который первым приходит на ум.

Большинство задач были придуманы автором и предлагались на различных математических олимпиадах или публиковались в журнале «Квантик». Все задачи проиллюстрированы занимательными картинками.

Для широкого круга читателей.

ББК 22.1

Художник Н. Н. Крутиков

12+

ISBN 978-5-4439-1269-1

© М. А. Евдокимов (текст), 2018

© Н. Н. Крутиков
(иллюстрации), 2018

© МЦНМО, 2018

© Yustas-07 (обложка), 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге собраны сто тест-задач с подробными решениями и комментариями. Представленные задачи предлагались в конкурсах журнала «Квантик», проходящих в соцсетях: vk.com/kvantik12 и facebook.com/kvantik12.

Все задачи для простоты снабжены вариантами ответов, но правильный ответ часто совсем не тот, который первым приходит на ум. Приведённые задачи весьма разнообразны по методам их решения и имеют глубокие связи с различными разделами «серьёзной» математики, что отражено в комментариях к решениям задач. Этот факт и объясняет название книги.

Уровень сложности задач в среднем возрастает по мере роста номера от сравнительно простых (1 — 20) до весьма сложных (80 — 100).

Большинство задач были придуманы автором и предлагались на различных математических олимпиадах или публиковались в журнале «Квантик». Например, к ним относятся задачи № 2, 6, 10, 11, 12, 14, 17, 31, 44, 48, 60, 63 и многие другие. Есть несколько замечательных задач других авторов: Толпыго А. К. (16), Романов А. (18), Токарев С. И. (19, 78), Кожевников П. А. (29), Женодаров Р. Г. (68), Митрофанов И. В. (93), Гарбер М. (95), Островский М. (98), Шаповалов А. В. (99), Косухин О. Н. (100). Некоторые задачи являются так называемым «математическим фольклором» и их авторство невозможно установить.

Хочется поблагодарить за помощь в подготовке данной книги коллектив сотрудников журнала «Квантик» и издательства МЦНМО. Художника Николая Крутикова, чьи рисунки стали украшением книги, можно по справедливости считать соавтором данного издания.

Желаю увлекательного чтения!

Март 2018 года

Тест-задачи



1. Арбузы

Арбузы весят 180 кг и почти целиком состоят из воды (на 99%). Со временем арбузы усохли и содержание воды снизилось на один процентный пункт (составило 98%). Сколько стали весить арбузы?



Варианты ответа:

- А. Примерно 178 кг
- В. Примерно 176 кг
- С. 162 кг
- Д. 90 кг
- Е. Правильный ответ другой

2. Разговор

На конференции присутствовали Алекс, Бен и Карл — представители двух конкурирующих фирм «Megasoft» и «Gamesoft». Представители одной и той же фирмы всегда говорят правду друг другу и лгут конкурентам. Алекс сказал Бену: «Карл из Megasoft». Бен ответил: «Я тоже». Где работает Алекс?



Варианты ответа:

- А. «Megasoft»
- В. «Gamesoft»
- С. «Microsoft»
- Д. Здесь нет однозначного ответа
- Е. Нигде не работает

3. Лист бумаги

Предположим, что большой лист бумаги толщиной 0,1мм сложили вдвое. Затем полученный лист сложили вдвое, и так далее всего 50 раз. Чему примерно равна толщина сложенного листа?



Варианты ответа:

- А. 5 мм
- В. 5 см
- С. 5 м
- Д. 5 км
- Е. Расстоянию от Земли до Солнца

4. Стрелки часов

Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?



Варианты ответа:

- A. 22
- B. 24
- C. 44
- D. 48
- E. У меня другой ответ

5. Настольный теннис

Костя, Миша и Антон сыграли несколько партий в настольный теннис на «вылет» (игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней). В итоге оказалось, что Костя сыграл 8 партий, Миша — 17.

Кто проиграл в пятой партии?



Варианты ответа:

- А. Костя
- В. Миша
- С. Антон
- Д. Не хватает данных для однозначного ответа
- Е. Тот, кто хуже всех играет

6. Сколько детей в семье?

В многодетной семье у каждого ребёнка спросили: «Сколько у тебя братьев?» Каждый из детей назвал одно натуральное число, а сумма всех названных чисел оказалась равной 35. Сколько детей в семье, если все дети ответили правильно?



Варианты ответа:

- A. 5
- B. 7
- C. 8
- D. Недостаточно данных для однозначного ответа
- E. Такого быть не может! Кто-то ошибся

7. Остров Невезения

На острове Невезения живут 250 человек, причём некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Каждый житель острова поклоняется одному из богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю острова задали три вопроса:

1. Поклоняешься ли ты богу Солнца?
2. Поклоняешься ли ты богу Луны?
3. Поклоняешься ли ты богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 140 человек, на второй — 120 человек и на третий — 110 человек. Сколько лжецов на острове?

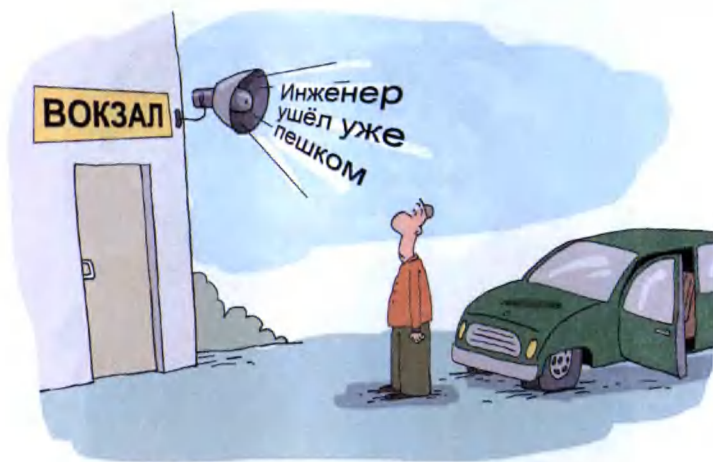


Варианты ответа:

- A. 140
- B. 130
- C. 120
- D. 110
- E. Не хватает данных для ответа

8. Инженер едет на работу

Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше обычного. В какое время произошла встреча инженера с машиной?

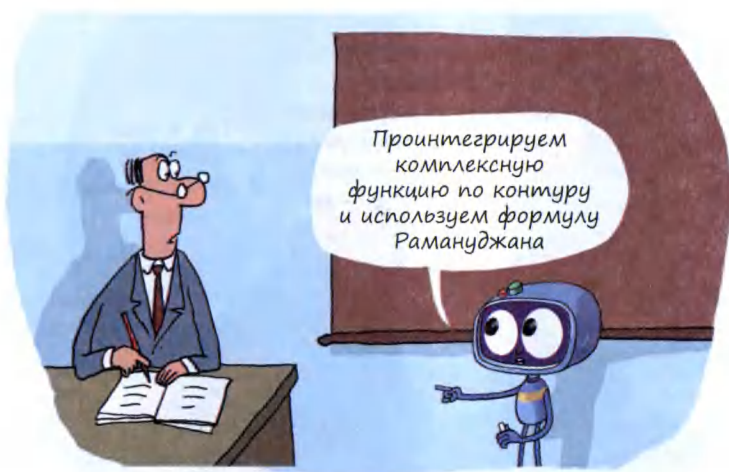


Варианты ответа:

- А. 7:30
- В. 7:40
- С. 7:50
- Д. Правильный ответ другой
- Е. Недостаточно данных для однозначного ответа

9. Квантик упражняется

Квантик нашёл произведение цифр для каждого двузначного числа, а затем подсчитал сумму всех полученных произведений. Сколько получилось в итоге?



Варианты ответа:

- A. 1225
- B. 2125
- C. 2215
- D. Правильный ответ другой
- E. Откуда я знаю, я же не робот!

10. Необычный матч

После матча по футболу (в каждой команде было по 10 игроков) между командой лжецов (всегда лгут) и командой правдолюбов (всегда говорят правду) каждого игрока спросили: «Сколько голов ты забил?» В итоге некоторые участники матча ответили «один», Вася сказал «два», многие ответили «три», а остальные сказали «пять».

Лжёт ли Вася, если правдолюбые победили со счётом 20:17 (автоголов в матче не было)?



Варианты ответа:

- А. Лжёт
- В. Говорит правду
- С. Нельзя однозначно утверждать
- Д. У меня другой ответ
- Е. Где же вы это видели такой матч?!

11. Мороженое

В Стране дураков в обращении находятся монеты в 1, 2, 3, ... 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя разными монетами. Хотел купить третье мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?



Варианты ответа:

- A. 4 сольдо
- B. 5 сольдо
- C. 6 сольдо
- D. 7 сольдо
- E. Недостаточно данных для однозначного ответа

12. Определи карту

Все 36 карт колоды выложены рубашкой вверх в виде «квадрата» 6×6 , как показано на рисунке. За один вопрос игрок может выбрать 9 карт, образующих «квадрат» 3×3 , и узнать набор карт, который им соответствует (без указания места, где какая карта лежит).

Какое наименьшее число вопросов нужно, чтобы узнать угловую карту?



Варианты ответа:

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. Этого сделать нельзя!

13. Разговор

Между коллегами Алексом, Беном и Карлом состоялся такой разговор. Алекс: «Наш начальник прочитал больше 10 книг». Бен: «Нет, он прочитал меньше 10 книг». Карл: «По крайней мере одну книгу он точно прочитал». Сколько книг прочитал начальник, если ровно одно из трёх утверждений истинно?



Варианты ответа:

- А. Ни одной
- В. Одну
- С. Десять
- Д. Правильный ответ другой
- Е. Они там вообще работают или книги читают?!

14. Электронное табло

Костя приехал в аэропорт, посмотрел на электронное табло, которое показывает время (часы и минуты), и заметил, что на табло горят четыре различные цифры. Когда он посмотрел на табло в следующий раз, там горели четыре другие различные цифры. Какое наименьшее время могло пройти между двумя этими моментами?



Варианты ответа:

- А. 24 мин
- В. 36 мин
- С. 1 ч 12 мин
- Д. 1 ч 47 мин
- Е. Правильный ответ другой

15. Перекрашивание шахматной доски

За один ход можно выбрать несколько строк и столбцов (возможно, только некоторые строки или некоторые столбцы) шахматной доски и поменять цвет всех клеток их объединения (чёрные перекрашиваем в белый цвет, а белые — в чёрный). За какое наименьшее число ходов можно перекрасить всю доску в белый цвет?

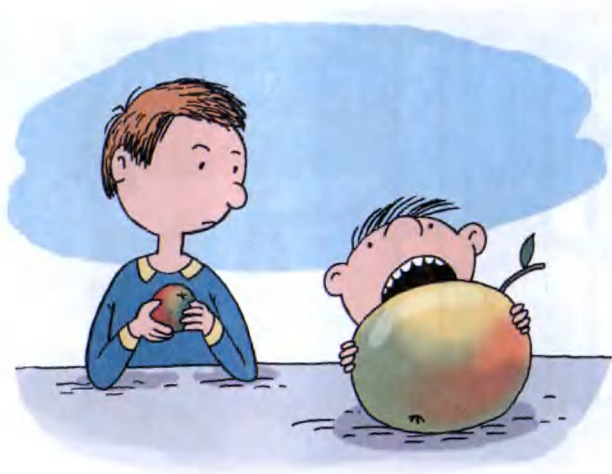


Варианты ответа:

- A. 2
- B. 4
- C. 8
- D. 16
- E. Правильный ответ другой

16. Жадные братья

На тарелке лежит 4 яблока весом 600 г, 400 г, 300 г и 250 г. Два брата собираются их съесть. Право выбора за старшим братом; он берёт одно и начинает его есть. Сразу за ним младший брат берёт одно из оставшихся яблок и тоже начинает есть. Скорость поедания яблок у братьев одинакова и время поедания яблока пропорционально весу этого яблока. Тот, кто съел своё яблоко, имеет право взять следующее из оставшихся. Какое яблоко должен взять старший брат вначале, чтобы в итоге съесть как можно больше?



Варианты ответа:

- А. Яблоко 600 г
- В. Яблоко 400 г
- С. Яблоко 300 г
- Д. Яблоко 250 г
- Е. Всю тарелку, ведь он сильнее

17. Сбежавшая клетка

Фигуру, изображённую на рисунке (квадрат 6×6 , у которого верхний ряд смещён на 1 клетку), разрезали по линиям сетки на несколько одинаковых частей, из которых можно сложить квадрат 6×6 (части разрешается переворачивать).

Какое наименьшее число частей могло получиться?



Варианты ответа:

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

18. Волейбольная секция

В волейбольной секции занимаются двенадцать ребят. На каждую игру тренер разбивает их на две команды по 6 человек. Он хочет провести несколько игр, чтобы в итоге каждый сыграл с каждым в одной команде. Какое наименьшее число игр потребуется?



Варианты ответа:

- A. 3
- B. 6
- C. 12
- D. Правильный ответ другой
- E. Тренер замучается это делать!

19. Рыцари и лжецы

На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих жителей острова и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один».

Что сказал третий?



Варианты ответа:

- А. «Ни одного»
- В. «Один»
- С. «Два»
- Д. Данной информации недостаточно
- Е. «Я не знаю этих людей»

20. Ловушка

Когда преступник прошёл $\frac{3}{8}$ моста, он заметил приближающийся со скоростью 60 км/ч полицейский автомобиль. Если преступник побежит назад, то встретит автомобиль у начала моста. Если преступник побежит вперёд, то автомобиль нагонит его у конца моста. С какой скоростью бегают преступник?



Варианты ответа:

- А. 12 км/ч
- В. 15 км/ч
- С. 18 км/ч
- Д. 20 км/ч
- Е. У меня другой ответ

21. Три охотника

Три охотника сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй — одну, третий — ни одной, но он расплатился семью патронами. Как должны поделить патроны первые два охотника, если все ели поровну?



Варианты ответа:

- А. 4 патрона первому и 3 патрона второму
- В. 5 патронов первому и 2 патрона второму
- С. 6 патронов первому и 1 патрон второму
- Д. Все патроны первому
- Е. 4 патрона первому, 2 второму, а оставшимся патроном стреляем в воздух

22. Средняя скорость

Дорога между двумя горными сёлами A и B идёт то в гору, то под гору. Старый автобус, который развивает среднюю скорость 30 км/ч в гору и 60 км/ч под гору, проехал из A в B и обратно. Какова была его средняя скорость на всём пути?



Варианты ответа:

- А. 40 км/ч
- В. 45 км/ч
- С. 50 км/ч
- Д. Недостаточно данных для однозначного ответа
- Е. Старый автобус точно сломается по дороге

23. Новогодняя акция, или околпаченные покупатели

В магазине, который закупает колпаки Деда Мороза у поставщика оптом и продаёт их в розницу, идёт новогодняя акция: при покупке двух колпаков — скидка 20%, а при покупке трёх колпаков — скидка 30% на эту покупку. Какова же наценка магазина в процентах (на сколько процентов розничная цена больше закупочной), если магазин имеет одинаковую прибыль с каждой продажи со скидкой?



Варианты ответа:

- A. 25%
- B. 50%
- C. 75%
- D. 100%
- E. Правильный ответ другой

24. Крестьяне и картофель

Три крестьянина зашли на постоялый двор отдохнуть и пообедать. Они заказали хозяйке сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка не стала будить постояльцев, а поставила еду на стол и ушла. Проснулся один из товарищей, съел свою долю и снова заснул. Затем проснулся второй крестьянин, сосчитал картофель, съел третью часть и заснул. Затем проснулся третий крестьянин, сосчитал картофель и съел третью часть. Тут проснулись его товарищи и увидели, что в чашке ещё осталось 8 картофелин. Сколько картофелин теперь должен взять себе каждый крестьянин, чтобы все в итоге съели поровну?



Варианты ответа:

- А. Первый берёт одну, второй — три, а остальные берёт третий
- В. Второй берёт две, а остальные берёт третий
- С. Второй берёт три, а остальные берёт третий
- Д. У меня другой ответ
- Е. Самый сильный заберёт себе всё

25. Футбольный мяч

Футбольный мяч шит из кожаных частей: чёрных пятиугольников и белых шестиугольников (см. рисунок). Вася легко сосчитал, что чёрных пятиугольников ровно 12. А сколько белых шестиугольников (пользоваться можно лишь рисунком ниже)?



Варианты ответа:

- A. 16
- B. 18
- C. 20
- D. 24
- E. Я не люблю футбол

26. Игра в карты

На столе лежит колода из 52 карт. Алекс, Бен и Карл по очереди берут 1 или 2 карты из колоды. Выигрывает тот, кто взял последнюю карту. Первым ходит Алекс, затем Бен, затем Карл и далее по кругу. Есть ли у кого-либо из игроков стратегия, которая позволит ему выиграть, даже если двое других действуют сообща?



Варианты ответа:

- А. Есть у Алекса
- В. Есть у Бена
- С. Есть у Карла
- Д. Ни у кого нет
- Е. Не знаю, я не играю в карты

27. Всего ничего

У эксперта есть мешок с золотым песком, двухчашечные весы и всего лишь одна гирька весом 1 г. За какое наименьшее число взвешиваний он может отмерить ровно 100 г золотого песка?



Варианты ответа:

- A. 7
- B. 8
- C. 10
- D. 100
- E. Правильный ответ другой

28. Волейбол

В волейбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз), 20% всех команд не одержали ни одной победы. Сколько всего команд участвовало в этом турнире?



Варианты ответа:

- A. 20
- B. 10
- C. 5
- D. Недостаточно данных для однозначного ответа
- E. Я не люблю волейбол

29. Ремонт

Тётя Маша купила рулон обоев радиуса 15 см на катушке радиуса 5 см (то есть толщина обоев на катушке равнялась 10 см). Она оклеила обоями половину стен в комнате, и толщина обоев на катушке стала равна 5 см (то есть рулон стал радиуса 10 см). «Ну что же, израсходовано полрулона, как раз хватит на вторую половину», — подумала тётя Маша.

На какую часть комнаты на самом деле хватит ей оставшейся части рулона?



Варианты ответа:

- A. 25%
- B. 30%
- C. 33%
- D. 40%
- E. Тётя Маша права!

30. Отмеченные числа

Отметили несколько натуральных чисел от 1 до 100 так, что для любых двух отмеченных чисел ни их сумма, ни их произведение не делится на 100. Какое наибольшее количество чисел могло быть отмечено?



Варианты ответа:

- A. 50
- B. 48
- C. 45
- D. 44
- E. Правильный ответ другой

31. Кто получит приз?

У двух игроков есть кубическая картонная коробка, в которой лежит приз. Они по очереди выбирают одно из рёбер коробки и разрезают коробку вдоль этого ребра. Выигрывает тот, после чьего хода можно открыть коробку и достать приз. Есть ли у кого-либо из игроков выигрышная стратегия в такой игре (коробка открывается, если она разрезана вдоль трёх рёбер одной грани)?

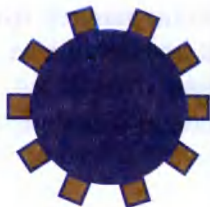


Варианты ответа:

- А. Есть у первого (того, кто ходит первым)
- В. Есть у второго
- С. Нет
- Д. Мы такое не проходили
- Е. Всё закончится так, как показано на рисунке

32. 10 друзей

Вася и девять его друзей живут на берегу круглого озера в 10 домах, расположенных через каждые 100 метров по периметру (см. рисунок). Однажды Вася решил собрать друзей вместе. Он выбирает дом, где ещё не был, идёт туда и забирает друга с собой, потом выбирает следующий дом, и т. д. Между двумя домами Вася всегда идёт по кратчайшему маршруту, но очередность посещения может быть произвольной. Какое наибольшее расстояние мог пройти Вася к моменту, когда все они собрались дома у последнего из друзей?



Варианты ответа:

- A. 4 км
- B. 4,1 км
- C. 4,2 км
- D. 4,5 км
- E. 5 км

33. Мешок золотых монет

Три пирата делили сундук золотых монет. Сначала первый взял 30% всех монет, затем второй 40% остатка, затем третий 50% остатка. После этого пираты обнаружили, что в сундуке остаётся ещё 63 монеты. Сколько всего монет было в сундуке?



Варианты ответа:

- A. 300
- B. 600
- C. 650
- D. 900
- E. У меня другой ответ

34. Куда ехать пожарным

Жители города *A* говорят только правду, жители города *B* — только ложь, а жители города *C* — попеременно правду и ложь (то есть из каждых двух высказанных ими утверждений одно истинно, а другое ложно). В пожарную часть, которая обслуживает все три города, сообщили по телефону:

- У нас пожар, скорее приезжайте!
- Где? — спросил дежурный по части.
- В городе *C*, — ответили ему.

Что делать пожарным, если пожар действительно имеет место?



Варианты ответа:

- А. Ехать в город *A*
- В. Ехать в город *B*
- С. Ехать в город *C*
- Д. Данных в условии недостаточно
- Е. Ничего. Пожарным некогда разгадывать ребусы!

35. Эскалатор

Хулиган Вася сбежал вниз по движущемуся эскалатору в торговом центре и насчитал 20 ступенек. Когда же он пробежал наверх по этому эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора, то насчитал 80 ступенек. Сколько ступенек насчитал Вася, когда он спускался вместе с охранником по неподвижному эскалатору?



Варианты ответа:

- A. 32
- B. 36
- C. 40
- D. 50
- E. Ему точно было не до подсчётов

36. Разрезание на одинаковые треугольники

Вася разрезал равносторонний шестиугольник на одинаковые треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло у него получиться?



Варианты ответа:

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

37. На острове

40% взрослых мужчин и 60% взрослых женщин на острове не состоят в браке. Какая часть взрослого населения острова не состоит в браке (многожёнство и однополые браки на острове запрещены)?

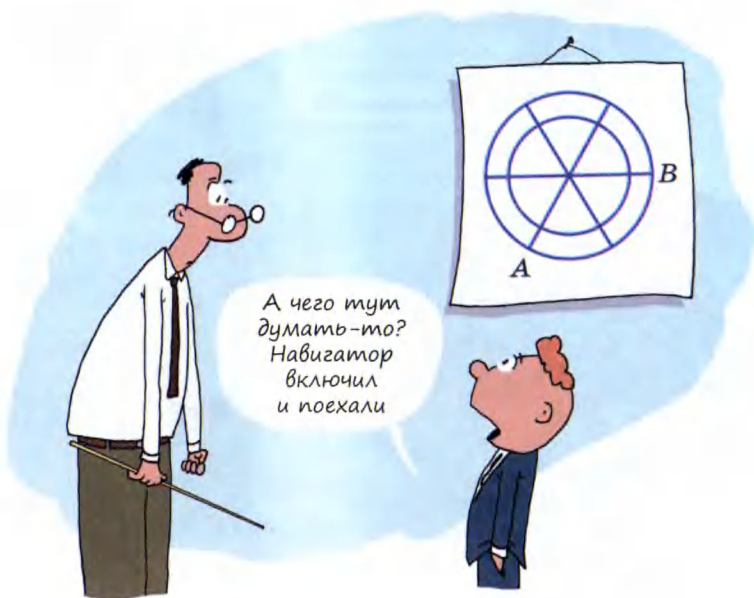


Варианты ответа:

- A. 48%
- B. 50%
- C. 52%
- D. 68,5%
- E. Мне рано ещё думать о браке

38. Схема города

На рисунке изображена схема автодорог некоторого города: всего есть 2 кольцевые автодороги (две окружности с общим центром) и 6 дорог, которые сходятся в этом центре под равными углами. Вася думает, как ему проехать из A в B : по внешней кольцевой автодороге или по внутренней. Какой из этих двух маршрутов короче?

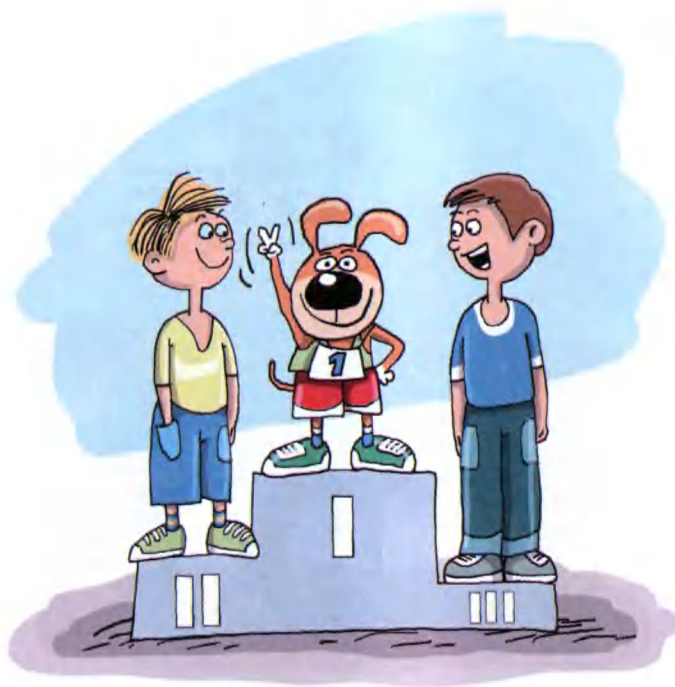


Варианты ответа:

- А. Одинаково
- В. По внутренней кольцевой
- С. По внешней кольцевой
- Д. Зависит от соотношения радиусов двух окружностей
- Е. На метро всё равно быстрее!

39. Встреча

Два брата Вася и Петя шли навстречу друг другу со скоростью 5 км/ч каждый. Когда расстояние между братьями стало равно 1 км, Шарик, который сопровождал Васю, заметил Петю и бросился ему навстречу со скоростью 20 км/ч. Поравнявшись с Петей, Шарик развернулся и побежал навстречу Васе, и так до тех пор, пока братья не встретились. Какое расстояние пробежал Шарик?

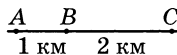


Варианты ответа:

- A. 1 км
- B. 2 км
- C. 3 км
- D. 4 км
- E. Нужно суммировать ряд

40. Где построить школу?

Три деревни A , B и C расположены вдоль дороги так, как показано на рисунке (B между A и C : на расстоянии 1 км от A и 2 км от C). Было решено построить школу так, чтобы общее расстояние, которое проходят все дети до школы и обратно, было как можно меньше. Где же нужно строить школу, если в A , B и C живут соответственно 80, 50 и 30 детей, которым нужно ходить в школу?



Варианты ответа:

- А. В деревне A , ведь там живёт больше всего детей
- В. Посередине между A и B
- С. В любой точке между A и C
- Д. Правильный ответ другой
- Е. В деревне C , ведь там живут дети директора

41. Масленица

Мама пекла блины к празднику. Через какое-то время на кухню пришли отец и два сына и стали поедать блины, которые закончились через полчаса (мама при этом продолжала печь блины). Если бы пришли лишь два сына, то блины закончились через час. Когда бы закончились блины, если пришёл лишь папа (скорость поедания блинов у всех троих одинакова)?



Варианты ответа:

- А. Через 1,5 часа
- В. Через 2 часа
- С. Через 2,5 часа
- Д. Через 3 часа
- Е. Никогда

42. Переправа

Ночь. Мальчик, папа, мама и бабушка находятся на одном берегу реки и хотят перейти по мосту на другой берег. У них на всех один фонарик. По мосту могут идти максимум двое (обязательно с фонариком). Папа способен преодолеть мост за 1 минуту, мальчик — за 2 минуты, мама — за 5 минут, бабушка — за 10 минут. За какое наименьшее время все они смогут переправиться на другой берег?



Варианты ответа:

- А. 13 мин
- В. 15 мин
- С. 17 мин
- Д. 19 мин
- Е. У меня другой ответ

43. 100 боксёров

В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвуют 100 боксёров. Была составлена некая сетка турнира (расписание боёв). Сколько боёв нужно будет провести, чтобы выявить победителя?



Варианты ответа:

- A. 99
- B. 100
- C. 127
- D. Это зависит от турнирной сетки
- E. У меня другой ответ

44. Крестики-нолики

Какое наибольшее число крестиков можно поставить на поле 5×5 , чтобы никакие три крестика не стояли «в ряд» (три крестика подряд по горизонтали, вертикали или диагонали)?



Варианты ответа:

- A. 15
- B. 16
- C. 17
- D. 18
- E. Правильный ответ другой

45. Гирьки

Какое наименьшее число гирек может быть у эксперта, чтобы он смог на двухчашечных весах отмерить 1 г, 2 г, ..., 39 г, 40 г золотого песка (любое целое число от 1 до 40) за одно взвешивание? *Замечание:* веса гирек у эксперта могут быть различными.

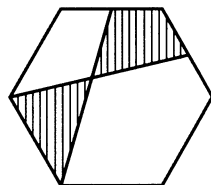


Варианты ответа:

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. Правильный ответ другой

46. Маша развлекается

На свой день рождения Маша позвала Васю и Петю и испекла торт, имеющий форму правильного шестиугольника (вид сверху). Разрезав его так, как показано на рисунке (каждый разрез проходит через вершину и середину стороны), она отдала один из выделенных кусков Васе (треугольный), а другой — Пете (четырёхугольный). Кому из Машиных гостей достался больший кусок торта?



Варианты ответа:

- А. Одинаково
- В. Пете
- С. Васе
- Д. Тому, кто нравится ей больше!
- Е. Папе, так как ему пришлось доедать всё остальное

47. 1000 привидений

В одной школе есть 1000 шкафов для одежды с номерами 1, 2, ..., 1000, которые на ночь запираются. В этой школе живут 1000 привидений. Ровно в полночь 1-е привидение открывает все шкафы. После этого 2-е привидение закрывает шкафы с номерами, делящимися на 2; затем 3-е меняет состояние (открывает, если шкаф закрыт, и наоборот) тех шкафов, номера которых делятся на 3, и т. д. Наконец, 1000-е привидение меняет состояние шкафа с номером 1000, после чего привидения исчезают. Сколько шкафов останутся открытыми?



Варианты ответа:

- A. 20
- B. 31
- C. 42
- D. 50

Е. Не знаю, это можно сосчитать только на компьютере

48. Четыре логика и карты

Четыре логика A , B , C и D сидят за круглым столом в этом порядке (если двигаться по часовой стрелке). Им показали девять карт одной масти (шестёрка, семёрка, ..., король, туз), а потом перемешали и выдали по карте, так что каждый видит лишь свою карту. Логикам по очереди задали один и тот же вопрос: «Ваша карта старше, чем у вашего соседа справа?» После этого A , B , C и D по очереди сказали «не знаю». Какая карта у D ?



Варианты ответа:

- A. Девятка
- B. Десятка
- C. Валет
- D. Дама
- E. Здесь нет однозначного ответа

49. Авиалинии

В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно долететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?



Варианты ответа:

- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12
- Е. Правильный ответ другой

50. Скачки

В забеге участвуют три лошади: Алла, Бэлла и Виола. Ставки на их победу принимаются с соотношениями 1:1, 1:2 и 1:6 соответственно. Это означает, что если вы, например, поставили на Бэллу и она пришла первой, то вы получаете назад свои деньги плюс удвоенную начальную ставку. В противном случае вы теряете деньги. Холмс имеет в кармане 205 фунтов. Может ли он гарантированно выиграть какую-либо сумму? Если «да», то какую?



Варианты ответа:

- А. Нет
- В. Да, 1 фунт
- С. Да, 5 фунтов
- Д. Да, 10 фунтов
- Е. Не знаю, мне запрещают играть в азартные игры

51. Материки и океаны

На некоторой планете, имеющей форму шара, есть 6 материков и несколько океанов. Причём из любой точки материка (или океана) можно добраться до любой другой точки этого материка (или океана), не покидая его, то есть материки и океаны не состоят из отдельных частей. Оказалось, что каждый океан граничит с каждым из материков. Какое наибольшее число океанов может быть на этой планете?



Варианты ответа:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. Сколь угодно много

52. Одинокий король

Король стоит на одной из клеток первой горизонтали (нижняя на рисунке). Два игрока по очереди передвигают короля на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля в правую верхнюю клетку (отмечена крестиком). Кто выигрывает при правильной игре?

	1	2	3	4	5	6	7	8
8								x
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								

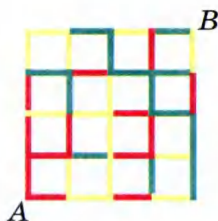


Варианты ответа:

- А. Всегда первый
- В. Всегда второй
- С. Будет ничья
- Д. Это зависит от начального положения короля
- Е. Тот, кто сильнее

53. Яндекс.Пробки

Сервис Яндекс.Пробки показал загруженность улиц города. Зелёный, жёлтый или красный участок между двумя соседними перекрёстками показывает, что время движения на автомобиле по этому участку равно 1, 2 или 3 минуты соответственно. А за какое наименьшее время можно проехать из точки А в точку В, двигаясь только на север или восток?



Варианты ответа:

- A. 16 мин
- B. 15 мин
- C. 14 мин
- D. 13 мин
- E. Я использую Google

54. Редкие номера

Герой одного фильма Вова похвастался перед друзьями, что у него «редкий телефонный номер, так как все цифры номера различны». Друзья стали смеяться. Прав ли Вова? Другими словами, какую долю от всех возможных семизначных номеров составляют «редкие»?

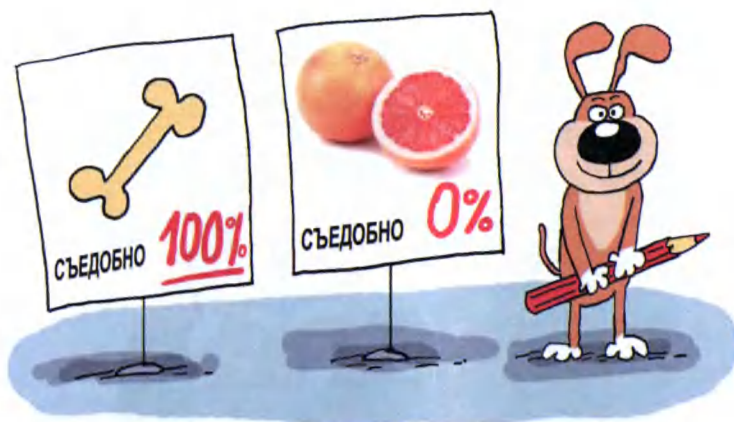


Варианты ответа:

- А. Почти все
- В. Чуть больше половины
- С. Примерно треть
- Д. Около 15%
- Е. Около 6%

55. Грейпфрут

Петя купил грейпфрут диаметра 10 см, толщина корки которого 1 см. Какая часть грейпфрута съедобна, если корка съедобной не является?



Варианты ответа:

- А. Примерно 90%
- В. Примерно 80%
- С. Примерно 70%
- Д. Примерно 50%
- Е. 0%, для меня он весь несъедобный!

56. Угадай число

Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр, а Саше — сумму цифр этого числа. Между мальчиками состоялся такой диалог.

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух попыток мне может не хватить».

Саша: «В таком случае мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».

Какое число сообщили Саше?



Варианты ответа:

- A. 6
- B. 10
- C. 12
- D. Правильный ответ другой
- E. Здесь нет однозначного ответа

57. Бумажный квадрат

Бумажный квадрат $ABCD$ со стороной 1 перегнули по прямой так, что вершина A совпала с серединой стороны CD . Чему равна площадь получившегося шестиугольника?



Варианты ответа:

- A. $3/4$
- B. $5/8$
- C. $11/16$
- D. $61/96$
- E. Я не понял, где здесь шестиугольник

58. Турпутёвки

Себестоимость недельной турпутёвки в Испанию состоит из постоянных издержек (при проживании семьи в одном номере) и переменных издержек, зависящих от количества человек в семье (питание, авиаперелёт и т. д.). Первое турагентство устанавливает цены так, чтобы иметь некоторую фиксированную прибыль с каждой проданной турпутёвки, а второе турагентство — некоторую фиксированную прибыль (возможно, другую) с каждого туриста. Оказалось, что стоимости путёвок на двоих и троих в обоих турагентствах одинаковы. В каком турагентстве дешевле купить турпутёвку на одного?



Варианты ответа:

- А. В первом
- В. Во втором
- С. Стоимости одинаковы
- Д. Недостаточно данных для однозначного ответа
- Е. Я отдыхаю в России!

59. Странные продавцы

— Сколько стоят эти часы? — спросил Дима у продавца-консультанта.

— 12 тысяч рублей, — ответил продавец-консультант. К нему тут же подошёл второй.

— Знаете, мой напарник называет все числа в 3 раза большими, чем они есть на самом деле. А в остальном он совершенно прав, — сказал второй продавец.

— Так часы стоят 4 тысячи рублей? — переспросил Дима.

— Знаете, мой напарник все числа преуменьшает в 12 раз. А в остальном он совершенно прав, — сказал первый продавец.

Так сколько же стоят часы?

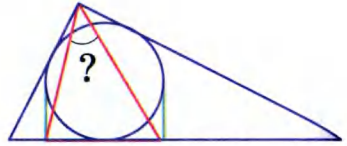


Варианты ответа:

- A. 2 тысячи рублей
- B. 24 тысячи рублей
- C. 48 тысяч рублей
- D. У меня другой ответ
- E. Это мошенники. Бегите оттуда!

60. Под каким углом?

Взяли произвольный прямоугольный треугольник и построили прямоугольную проекцию его вписанной окружности на гипотенузу (см. рисунок). Под каким углом видна эта проекция из вершины прямого угла?



Варианты ответа:

- А. 30°
- В. 45°
- С. 60°
- Д. Это зависит от величины острого угла треугольника
- Е. Правильный ответ другой

61. Пираты и дукаты

У девяти пиратов был сундук с серебряными и золотыми монетами достоинством в 1 и 10 дукатов соответственно, причём тех и других поровну, а всего в сундуке не более 1000 дукатов. При подсчёте того, сколько дукатов причитается каждому, осталось 7 лишних дукатов. Возник спор, кому они должны достаться, и в результате два пирата были убиты. После этого при подсчёте причитающихся долей осталось 3 лишних дуката. Сколько монет было в сундуке?



Варианты ответа:

- A. 62
- B. 124
- C. 126
- D. 682
- E. Правильный ответ другой

62. Кафедра логики

На кафедре логики работают правдолюбцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды каждый из сотрудников сделал два заявления:

1) на кафедре нет и десяти человек, которые работают больше меня;

2) по крайней мере у двадцати человек на кафедре зарплата больше, чем у меня.

Известно, что нагрузка у всех сотрудников разная и зарплаты тоже различаются. Сколько человек работает на кафедре логики?



Варианты ответа:

A. 20

B. 21

C. 30

D. 31

E. Недостаточно данных для однозначного ответа

63. Котлетный сюрприз

Вася купил пачку замороженных котлет «Сюрприз». Котлеты одинаковые круглые, а их диаметр лишь в два раза меньше диаметра сковородки. Однако через несколько минут две котлеты на сковородке ужарились, сохранив круглую форму (лёд растаял, и вода выпарилась), и Вася смог дополнительно поместить на сковородку две оставшиеся котлеты из пачки. Какую часть котлет (как минимум) составлял лёд?



Варианты ответа:

- A. 33%
- B. 50%
- C. 55%
- D. 67%
- E. Где же вы видели такие котлеты?!

64. Дом

В доме, где живёт Вася, не более 1000 квартир. В каждом подъезде одинаковое число этажей, на каждом этаже по 4 квартиры. Вася заметил, что число квартир с двузначным номером у него в подъезде ровно в 10 раз больше числа подъездов. Сколько всего квартир в этом доме?



Эта задача имеет:

- А. Два решения
- В. Три решения
- С. Четыре решения
- Д. Пять решений
- Е. Ноль решений

65. Баскетбол

Баскетбольный матч между командами 10 и 11 классов продолжался 45 минут. На исходе каждой минуты одна из команд зарабатывала 2 или 3 очка. Оказалось, что обе команды одинаковое время вели в счёте в течение всего матча. Какова наибольшая возможная разница в счёте по итогам матча?



Варианты ответа:

- A. 3
- B. 33
- C. 68
- D. У меня другой ответ
- E. Я не люблю баскетбол

66. Случай с навигатором

Петя ехал в Москву из области. После того как Петя проехал $\frac{3}{4}$ пути, навигатор показал, что расчётное время в пути до Москвы равно 15 минут (навигатор считает, что средняя скорость на оставшемся участке будет равна средней скорости в пути к этому моменту). Однако сразу после этого скорость потока замедлилась и оставалась постоянной на всей оставшейся части пути до Москвы. В итоге через 15 минут навигатор снова показал расчётное время до Москвы 15 минут. Какое расчётное время покажет навигатор ещё через полчаса?



Варианты ответа:

- А. 10 мин
- В. 15 мин
- С. 30 мин
- Д. Петя уже доедет к этому моменту
- Е. Петя не выдержит и поедет обратно

67. Угол в квадрате

На единичной диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N так, что $BM = 1/3$, а $DN = 1/4$. Чему равен угол MAN ?



Варианты ответа:

A. 45°

B. 30°

C. 60°

D. Другому углу

E. «MAN» — это не угол, а «мужчина» по-английски

68. Две партии

На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбывсегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или позади другого.)

Значит, Вы утверждаете, что Вы – лжец?
Но если Вы лжец, то это неправда,
и Вы правдолюб. Как всё запутано...



Варианты ответа:

- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12
- E. 16

69. Бильярд

Большая из сторон бильярдного стола прямоугольной формы в два раза больше меньшей стороны. В середине больших сторон и в углах находятся лузы, а в центре стола стоит шар. Под каким углом к большей стороне нужно пустить шар, чтобы он отразился от каждого из четырёх бортов ровно один раз и угодил в лузу?



Варианты ответа:

A. $\approx 28^\circ$

B. $\approx 30^\circ$

C. $\approx 32^\circ$

D. $\approx 45^\circ$

E. Это невозможно!

70. Трамвай, студент и профессор

Профессор и его студент живут в одном подъезде недалеко от трамвайной линии. Они выходят из дома одновременно, чтобы успеть на лекцию. Студент бежит к ближайшей трамвайной остановке со скоростью 12 км/ч , а профессор идёт вдоль трамвайной линии с вдвое меньшей скоростью до другой остановки. Тем не менее, студент опаздывает на лекцию (нигде не задерживаясь по дороге), а профессор приезжает вовремя. Какова наибольшая возможная скорость трамвая, если известно, что скорость трамвая постоянна и выражена целым числом км/ч ?



Варианты ответа:

- А. 18 км/ч
- В. 23 км/ч
- С. 30 км/ч
- Д. Здесь нет правильного ответа
- Е. Что за бред? Это невозможно!

71. У вас продаётся славянский шкаф?

Магазин закупает шкафы оптом у производителя и продаёт их в розницу. Спрос на шкафы стабильный, равномерный в течение года и составляет 130 штук в неделю. Для хранения товара магазин арендует определённую часть склада (срок аренды 1 год), при этом стоимость хранения 1 шкафа на складе равна 1 тыс руб в год. Издержки на оформление и доставку одного оптового заказа равны 10 тыс руб и не зависят от размера заказа. Сколько раз в течение года магазин должен производить оптовые закупки, чтобы получить наибольшую прибыль?



Варианты ответа:

- A. 12 раз
- B. 24 раза
- C. 26 раз
- D. 52 раза
- E. Не хватает данных для ответа

72. Проезд перекрёстка

«Запорожец» и «Мерседес», находящиеся в 1 км от одного и того же перекрёстка (дороги пересекаются под прямым углом), движутся по разным дорогам со скоростями 60 км/ч и 90 км/ч соответственно в сторону перекрёстка и проезжают его не останавливаясь. Чему было равно наименьшее расстояние по прямой между автомобилями (размерами автомобилей можно пренебречь)?



Варианты ответа:

- А. Не более 250 м
- В. Около 275 м
- С. Чуть больше 300 м
- Д. Примерно 333 м
- Е. Это же «Мерседес» и «Запорожец». Они просто обязаны встретиться!

73. Метро

В городе Нью-Васюки 40 линий метро. Любые две линии пересекаются в единственной точке, образуя станцию, на которой осуществляется также и переход с одной линии на другую. При этом любая станция является пересечением ровно двух линий. При каком наибольшем k любые k станций метро можно закрыть на ремонт и при этом от любой работающей станции можно будет доехать до любой другой работающей (закрытие станции отменяет переход, но не работу соответствующих линий метро)?



Варианты ответа:

- A. 40
- B. 75
- C. 80
- D. 85
- E. Правильный ответ другой

74. Радиус и хорда

OA — радиус круга диаметра 15 см с центром O . Хорда BC этого круга параллельна OA и отсекает от круга сегмент высоты 1 см (меньшая из дуг с концами A и B содержит точку C). На каком расстоянии от центра круга пересекаются прямые OB и AC ?



Варианты ответа:

- А. 30 см
- В. 72 см
- С. Около 3 метров
- Д. Около 34 метров
- Е. Видно же, что они не пересекаются

75. Дни рождения

Какова вероятность того, что в классе из 30 учеников хотя бы у двоих дни рождения совпадают?



Варианты ответа:

- А. Примерно 5%
- В. 50%
- С. Примерно 70%
- Д. Примерно 95%
- Е. Правильный ответ другой

76. Четыре города

Четыре крупных города страны Абдулия расположены в пустыне в вершинах квадрата со стороной 100 км. Король Абдул хочет соединить их системой дорог так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой по дороге. Стоимость строительства одного километра дороги равна 1 млн динаров. Найдите наименьшие затраты на строительство такой системы дорог.



Варианты ответа:

- А. 263 млн динаров
- В. 273 млн динаров
- С. 283 млн динаров
- Д. 300 млн динаров
- Е. Не знаю чему, но половину наверняка украдут

77. Туристы

Туристы находятся в лесу в 3 км от прямой дороги, идущей в деревню, и в 5 км от деревни по прямой через лес. Туристы могут двигаться по лесу со средней скоростью 3 км/ч и по дороге со средней скоростью 5 км/ч. За какое наименьшее время они могут добраться до деревни?



Варианты ответа:

- A. 1 ч 30 мин
- B. 1 ч 32 мин
- C. 1 ч 36 мин
- D. 1 ч 40 мин
- E. Могли бы двигаться и побыстрее, если так торопятся

78. Сколько друзей?

У Димы всего 20 одноклассников. У каждого двоих из 20 разное число друзей в этом классе.

Сколько друзей у Димы?



Варианты ответа:

- А. 1
- В. 10
- С. 20
- Д. Правильный ответ другой
- Е. Недостаточно данных для однозначного ответа

79. Рога & копыта

Фирма «Рога & копыта» записала свои расходы в рублях по 40 статьям бюджета, получив список из 40 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый сотрудник фирмы взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 39 чисел он делает то же самое, и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все сотрудники получили разные результаты. Какое наибольшее число сотрудников могло работать в фирме?



Варианты ответа:

- A. 20
- B. 21
- C. 39
- D. 40

Е. А что, на компьютер денег фирме не хватило?!

80. Деловая встреча

Алекс и Бен договорились встретиться в кафе сегодня между 14:00 и 14:30. Каждый с равной вероятностью может подойти в любой из минутных временных промежутков между 14:00 и 14:30. Каждый из них ждёт 10 минут, а затем уходит. Какова вероятность того, что Алекс и Бен сегодня встретятся в кафе?



Варианты ответа:

- A. $1/2$
- B. $2/3$
- C. $3/4$
- D. $5/9$
- E. Правильный ответ другой

81. Чёрные квадраты

Художник-абстракционист взял деревянный куб размерами $7 \times 7 \times 7$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов: чёрный, белый или красный так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)



Варианты ответа:

- A. 24
- B. 26
- C. 28
- D. 30
- E. У меня другой ответ

82. 12 стульев

У Остапа Бендера есть 12 стульев. В одном из стульев спрятаны бриллианты, и в одном (возможно, в том же самом) находится золото. Остап по очереди вскрывает каждый стул и проверяет всё его содержимое. Остап знает про бриллианты, но ничего не знает про золото. Поэтому если Остап нашёл бриллианты, то остальные стулья он не трогает. Какова вероятность того, что Остап найдёт бриллианты, но не найдёт золото?



Варианты ответа:

- A. $1/2$
- B. $5/12$
- C. $11/24$
- D. Правильный ответ другой
- E. 0, я смотрел фильм!

83. Эксперимент

Мартышка поднимается на один из 100 этажей небоскрёба и бросает вниз кокос. Она пытается выяснить, какой самый нижний этаж, с которого нужно бросить кокос, чтобы тот разбился. Каково минимальное число попыток, достаточное для этого, если у мартышки всего два кокоса?

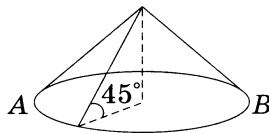


Варианты ответа:

- A. 10
- B. 12
- C. 14
- D. 16
- E. Правильный ответ другой

84. Переход через Альпы

Группа людей оказалась у подножия горы конической формы, угол наклона которой постоянный и составляет 45° . Высота горы 2000 м. Группа хочет оказаться в диаметрально противоположной точке подножия горы (пройти из точки A в точку B на рисунке). Чему примерно равна длина кратчайшего маршрута из A в B .



Варианты ответа:

- А. 4,5 км
- В. 5 км
- С. 5,5 км
- Д. 6 км
- Е. 6,5 км

85. Про ковбоя Джо

Ковбой Джо выходит из бара на середину дороги шириной 3 метра, которая ведёт прямо к его дому, расположенному в 20 метрах от бара. С каждым шагом пьяный Джо продвигается вперёд на полметра и на полметра отклоняется вправо или влево случайным образом (с вероятностью $1/2$ вправо и с вероятностью $1/2$ влево). Если Джо оказывается на краю дороги, то он падает в канаву и остаётся там спать до утра. Каковы у Джо шансы не свалиться в канаву и дойти до дома?



Варианты ответа:

- A. 15%
- B. 0,4%
- C. 0,2%
- D. 0,15%
- E. 50%, так как либо дойдёт, либо не дойдёт

86. Футбольный турнир

В футбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз), участвовало 16 команд, каждые две из которых набрали различное число очков (победа — 3 очка, ничья — 1 очко). Оказалось, что команда «Амкар» проиграла всем командам, набравшим в итоге меньшее число очков. Какого наилучшего результата (укажите место) она могла добиться?



Варианты ответа:

- А. Пятое место
- В. Шестое место
- С. Седьмое место
- Д. Восьмое место
- Е. Я болею за «Спартак»!

87. Старушка и 99 джентльменов

Старушка заходит в самолёт первой и садится на первое попавшееся место. Затем заходит первый джентльмен. Если его место свободно, то он садится на своё место. Если его место занято, то он садится на первое попавшееся место. Затем заходит второй джентльмен, который поступает точно так же, и т. д. Какова вероятность того, что последний 99-й джентльмен сядет на своё место?



Варианты ответа:

- A. $1/2$
- B. $1/3$
- C. $1/99$
- D. $1/100$
- E. Правильный ответ другой

88. Остров сокровищ

Десять пиратов на острове должны разделить между собой сокровище, состоящее из сотни одинаковых золотых монет. Они делят его так: старший пират предлагает, как делить монеты, а потом каждый из остальных соглашается или нет с его предложением. Если по крайней мере половина пиратов, включая того, кто делит, согласны, то они поделят монеты так, как предложил старший пират. Если же меньше половины пиратов согласны, они убивают старшего пирата и начинают всё сначала. Самый старший пират (из тех, кто выжил) предлагает новый план, за него голосуют по тем же правилам, а потом или делят добычу, или убивают старшего пирата. Так продолжается до тех пор, пока какой-то план не будет принят. Какое наибольшее число монет может гарантированно получить самый старший пират, если пираты жадные, мыслят очень логично, не состоят в сговоре (каждый сам за себя) и все они хотят жить.



Варианты ответа:

A. 10

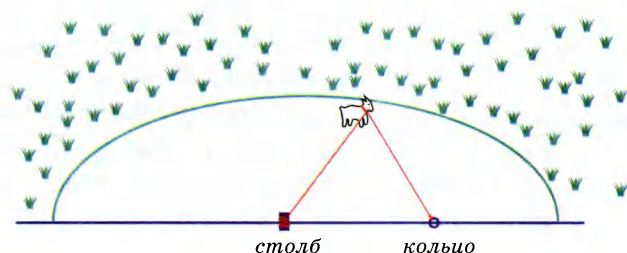
B. 20

C. 96

D. Правильный ответ другой

E. Это же пираты. Ничего нельзя гарантировать

89. Козаметрия. Часть 1



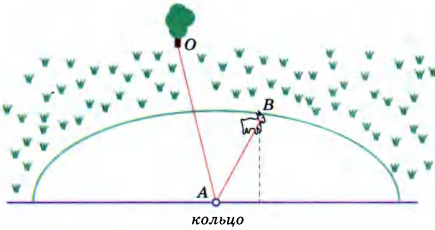
Математик держит на своём садовом участке козу. Он взял верёвку длиной 10 м, привязал один конец к столбу забора, пропустил верёвку через кольцо на ошейнике козы и приделал к другому концу веревки кольцо, которое может скользить по проволоке вдоль забора. В итоге коза съела всю траву, до которой могла дотянуться. Область точек, до которых могла дотянуться коза, ограничена дугой



Варианты ответа:

- А. окружности
- В. параболы
- С. эллипса
- Д. какой-то другой кривой
- Е. Математик явно сошёл с ума

90. Козаметрия. Часть 2



Математик держит на своём садовом участке козу. Он взял верёвку длиной 20 м, привязал один конец к дереву, пропустил верёвку через кольцо, которое может скользить по проволоке

вдоль прямого забора, и привязал другой конец к ошейнику козы. В итоге коза съела всю траву, до которой могла дотянуться. Область точек, до которых могла дотянуться коза, ограничена дугой



Варианты ответа:

- А. окружности
- В. параболы
- С. эллипса
- Д. какой-то другой кривой
- Е. Математик! Хватит ставить эксперименты над бедным животным!

91. Футбольный турнир

Турнир по футболу, в котором участвовало 16 команд, проходил в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз). Оказалось, что к некоторому моменту каждая команда сыграла не менее k матчей, но нет четырёх команд, попарно сыгравших между собой. Чему равно наибольшее возможное значение k ?



Варианты ответа:

- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12
- E. Правильный ответ другой

92. Робинзон исследует остров

Робинзон оказался на необитаемом острове, который имеет круглую форму. Как-то Робинзон вышел из своей хижины на берегу моря и, пройдя 3 км на запад и 4 км на юг, очутился на берегу моря. На следующий день Робинзон вышел из своей хижины, пошёл на юго-запад и очутился на берегу моря через 10 км. Ещё через день Робинзон решил обойти остров вдоль берега. Какое расстояние ему нужно будет преодолеть?



Варианты ответа:

- А. Примерно 16 км
- В. Примерно 31 км
- С. Примерно 63 км
- Д. Примерно 113 км
- Е. Правильный ответ другой

93. Испорченный банкомат

У рассеянного математика есть 50 банковских карточек, на которых лежат 1, 2, 3, ..., 50 тысяч рублей. Математик знает об этом, но не знает, на какой из карточек какая сумма лежит. Математик может вставить карточку в банкомат и запросить некоторую сумму. Банкомат выдаёт требуемую сумму, если она на карточке есть, не выдаёт ничего, если таких денег на карточке нет, а карточку «съедает» в любом случае. При этом банкомат не показывает, сколько денег было на карточке. Какую наибольшую сумму математик может гарантированно снять со всех своих карточек?



Варианты ответа:

- A. 625 тысяч
- B. 650 тысяч
- C. 750 тысяч
- D. Правильный ответ другой
- E. Это же математик. Поэтому ничего нельзя гарантировать!

94. Почти правильный треугольник

Стороны треугольника равны 2016, 2017 и 2018. Чему равно расстояние между точкой пересечения медиан и центром вписанной окружности этого треугольника?



Варианты ответа:

A. $1/3$

B. $1/2$

C. 1

D. Правильный ответ другой

E. Это можно подсчитать только на компьютере

95. 8 марта

В одном классе учатся 16 девочек и 16 мальчиков. Каждый мальчик позвонил некоторым девочкам из этого класса и поздравил с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке 2 раза). При этом оказалось, что можно единственным образом составить 16 пар так, чтобы в каждой паре были девочка с мальчиком, который её поздравил. Какое наибольшее общее число звонков могли получить девочки от мальчиков в этот день?



Варианты ответа:

- A. 64
- B. 120
- C. 128
- D. 144
- E. Правильный ответ другой

96. Бестолковые новобранцы

100 новобранцев выстроены в одну шеренгу плечом к плечу. По команде «налево» все одновременно повернулись на 90° , но некоторые повернулись налево, а другие направо. Ровно через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» (на 180°). Ещё через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается на 180° , и т. д. Какое наибольшее время может продолжаться движение в строю?



Варианты ответа:

- А. 1 мин 39 сек
- В. 100 сек
- С. Около 5 мин
- Д. Сколь угодно долго
- Е. Не знаю, пока командир не прекратит это безобразие

97. Красный туз

Ведущий перемешал колоду из 52 карт и предлагает игроку поставить на какой-либо номер k от 1 до 52. Затем ведущий принимается переворачивать карты из колоды по одной, начиная с самой верхней, до тех пор пока впервые не появится туз красной масти. Игрок выигрывает, если эта карта оказалась k -й перевернутой. На какой же номер k нужно делать ставку игроку, чтобы его шансы выиграть были как можно больше?



Варианты ответа:

- A. 1
- B. 26 или 27
- C. Не имеет значения, шансы одинаковы
- D. У меня другой ответ
- E. Выиграть шансов вообще нет. У ведущего явно красный туз в рукаве

98. Платная информация

Вася загадал натуральное число от 1 до 55. Петя может указать любой набор чисел и спросить, есть ли загаданное число в этом наборе. Вася всегда отвечает только правду, но за ответ «да» Петя должен заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима Пете, чтобы наверняка угадать число?



Варианты ответа:

- A. 16
- B. 12
- C. 9
- D. 8
- E. Правильный ответ другой

99. Осторожные взвешивания

Коллекционер узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более лёгкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причём потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у коллекционера, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за шесть взвешиваний?



Варианты ответа:

- A. 24
- B. 36
- C. 64
- D. 73
- E. 99

100. Детектив

Детектив расследует преступление. В деле замешаны 70 человек, среди которых один — преступник, ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 70 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. За какое наименьшее число дней детектив может заведомо раскрыть дело?



Варианты ответа:

- A. 8
- B. 10
- C. 12
- D. Правильный ответ другой
- E. Преступник не выдержит и расколется ещё раньше

Решения



Решения

1. Кажется, что вес арбузов не должен сильно измениться, но это не так! Арбузы состоят из воды и «сухого остатка». Вес «сухого остатка» был равен

$$0,01 \cdot 180 \text{ кг} = 1,8 \text{ кг}.$$

Но вес сухого остатка не изменился, после того как арбузы усохли. Пусть арбузы стали весить X кг.

$$\text{Тогда по условию } 0,02 \cdot X = 1,8 \text{ кг} \Rightarrow X = 90 \text{ кг}.$$

Ответ: D.

2. Предположим, что Алекс сказал правду, но тогда Алекс и Бен из одной фирмы. Тогда и Бен сказал правду. Получаем, что Алекс, Бен и Карл из одной фирмы — «Megasoft».

Пусть Алекс соврал (на самом деле Карл из «Gamesoft»). Тогда Алекс и Бен из разных фирм (они лгут друг другу). Значит, Бен также солгал (на самом деле Бен из «Gamesoft»). Но мы знаем, что Бен и Алекс должны быть из разных фирм, так как они лгут друг другу. Поэтому Алекс снова из «Megasoft».

Ответ: A.

3. Кажется, что толщина полученного листа не может быть очень большой, но это не так. Ясно, что каждый раз количество слоёв удваивается. Значит, толщина полученного листа должна быть равна $0,1 \cdot 2^{50}$ мм. Это число огромное! Можно взять неравенство $2^{10} = 1024 > 10^3$, чтобы оценить это число:

$$0,1 \cdot 2^{50} \text{ мм} > 0,1 \cdot (10^3)^5 \text{ мм} = 10^{14} \text{ мм} = 10^8 \text{ км},$$

то есть больше чем 100 миллионов километров! Расстояние же от Земли до Солнца примерно равно 150 миллионам километров. Конечно, на практике вам не удастся сложить лист вдвое 50 раз, хотя на первый взгляд это кажется легко осуществимым.

Комментарий: заблуждение возникает потому, что человек не привык оперировать с большими числами и не сразу улавливает разницу между линейной и показательными функциями. Однако эта разница огромна при больших значениях аргумента n . Например, показательная функция 2^n больше линейной функции $100 \cdot n$, уже начиная с $n = 10$.

Ответ: E.





4. Заметим, что за сутки минутная стрелка совершает 24 оборота, а часовая — 2 оборота. Поэтому совпадают они в течение суток ровно 22 раза.

Между любыми двумя моментами совпадения стрелок есть ровно два момента, когда стрелки образуют прямой угол. Поэтому в течение суток часовая и минутная стрелки образуют прямой угол ровно 44 раза.

Ответ: С.



5. Заметим, что для любых двух идущих подряд партий Костя участвовал хотя бы в одной из них. Значит, всего партий не может быть больше, чем $2 \cdot 8 + 1 = 17$. Но по условию Миша сыграл 17 партий, то есть всего было ровно 17 партий и Миша участвовал в каждой из них. При этом все партии с чётными номерами он играл с Костей (всего 8 партий), а все партии с нечётными номерами — с Антоном. Значит, в пятой партии Антон проиграл Мише.

Ответ: С.



6. Пусть в семье m мальчиков и n девочек. Тогда n девочек ответили « m », а m мальчиков ответили « $m - 1$ ». Сумма всех названных чисел будет равна $n \cdot m + m \cdot (m - 1) = m \cdot (n + m - 1)$.

По условию $m \cdot (n + m - 1) = 35$. Отсюда m является натуральным делителем 35, то есть m может быть равно 1, 5, 7 или 35. Случай $m = 1$ (один мальчик и у него нет братьев) отбрасывается, так как по условию каждый из детей назвал одно *натуральное* число.

Из оставшихся вариантов только $m = 5$ даёт неотрицательное значение для n . При этом $n = 3$ и всего в семье 8 детей.

Ответ: С.



7. Пусть на острове всего x лжецов.

Заметим, что лжец ответит «да» ровно на два вопроса из трёх, а правдолюб ответит «да» лишь на один вопрос из трёх. Поэтому общее число ответов «да» равно $2x + (250 - x) = 250 + x$. С другой стороны, по условию общее число ответов «да» равно

$$140 + 120 + 110 = 370.$$

Решения

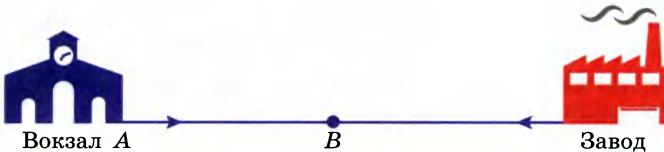
Отсюда получаем $250 + x = 370$, то есть $x = 120$.

Ответ: С.

8. Кажется, что данных для ответа на вопрос недостаточно, но это не так. Пусть B — точка встречи инженера и машины. По условию инженер сэкономил 20 минут.



Это как раз то время, за которое автомобиль проезжает от B до A (вокзала) и обратно до точки B . Значит, на путь из B в A потребуется половина этого времени, то есть 10 минут. Но автомобиль приехал бы на вокзал ровно в 8:00. Поэтому в точке B он был в 7:50.



Комментарий: мы предполагаем, что на путь из B в A и на путь из A в B автомобиль тратит одинаковое время, однако это не всегда так. Например, если путь из B в A идёт в гору, автомобиль — старая «Волга» и скорость в гору меньше, чем скорость под гору. Заметим также, что если бы условие было сформулировано чуть иначе: «...Инженер оказался на заводе на 20 минут раньше обычного, встретив машину на своём пути...», то задача допускала бы дополнительное решение: инженер пришёл на завод, прежде чем машина выехала за ним.

Например, если расстояние от вокзала до завода 4 км, скорость инженера 6 км/ч, скорость автомобиля 60 км/ч и автомобиль обычно выезжает на вокзал ровно в 7:56. Тогда инженер придёт на завод в 7:40, встретив машину стоящей у завода.

Ответ: С.

9. Заметим, что сумма, которую нам нужно найти, равна произведению

$$(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9).$$

Например, произведение $8 \cdot 3$, соответствующее числу 83, получится, когда мы из первой скобки возьмём 8, а из второй 3.



Поскольку $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, искомая сумма равна $45^2 = 2025$.

Ответ: D.



10. Предположим, что Вася является правдолюбом и действительно забил два гола. Тогда остальные девять участников команды правдолюбов забили в сумме 18 голов. Но по условию каждый из них, кроме Васи, забил нечётное число голов, а сумма девяти нечётных чисел должна быть нечётна. Получаем противоречие. Следовательно, Вася лжёт.

Ответ: A.



11. Сдача тремя разными монетами составляет не меньше чем $1 + 2 + 3 = 6$ сольдо. Так как этих денег не хватило на мороженое, то оно стоит не меньше 7 сольдо.

Однако больше 7 сольдо мороженое стоять не может, так как иначе вначале у Буратино должно было быть по крайней мере $8 + 8 + 6 = 22$ сольдо. Но у Буратино вначале была лишь одна монета, то есть не больше 20 сольдо. Итак, мороженое могло стоять лишь 7 сольдо. Легко убедиться, что описанная в задаче ситуация возможна, если у Буратино вначале была монета в 20 сольдо.

Ответ: D.



12. Пусть нам требуется узнать угловую карту 1. Рассмотрим угловой квадрат 3×3 (множество карт A). Сместим его на одну клетку вправо (множество карт B) и на одну клетку вниз (множество карт C), как показано на рисунке. Задав три вопроса про наборы карт A, B и C, мы также будем знать, какие карты лежат одновременно в A и B либо одновременно в A и C. Но это как раз множество A без угловой карты!

	A			B			
	1	2	3	4	5	6	
	7	8	9	10	11	12	
C	13	14	15	16	17	18	
	19	20	21	22	23	24	
	25	26	27	28	29	30	
	31	32	33	34	35	36	

Так мы сможем определить, какая карта лежит на месте 1. Двух вопросов не хватит, так как никакие 2 квадрата 3×3 не пересекаются ровно по одной угловой карте.

Ответ: B.

13. Предположим, что начальник прочитал ровно k книг, где k может принимать значения $0, 1, 2, 3, \dots$. Если предположить, что $0 < k < 10$ или $k > 10$, то истинны были бы ровно два утверждения из трёх, что противоречит условию задачи. Остаются лишь 2 случая $k = 0$ и $k = 10$. Легко проверить, что эти два случая удовлетворяют условию задачи.

Ответ: D.

14. Пусть табло показывало время $ab:cd$, где a, b, c, d — различные цифры.

Если $a = 0$, то должно было пройти больше часа, чтобы появились четыре *другие* различные цифры (10:** не подходит, так как цифра 0 уже была).

Если $a = 2$, то снова должно пройти больше часа, чтобы условие задачи было выполнено (следующий возможный вариант лишь 01:**)

Наконец, если $a = 1$, то нам нужно искать интервал вида $19:xy$ — $20:zt$. Легко понять, что наименьшее время будет достигаться для следующего варианта, удовлетворяющего условию задачи: 19:58 — 20:34.

Ответ: B.

15. Первым ходом поменяем цвет всех клеток в столбцах с нечётными номерами (см. рисунок). После этого полностью белые и чёрные строки будут чередоваться.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■	□	■	□	■	□	■	□
2	□	■	□	■	□	■	□	■
3	■	□	■	□	■	□	■	□
4	□	■	□	■	□	■	□	■
5	■	□	■	□	■	□	■	□
6	□	■	□	■	□	■	□	■
7	■	□	■	□	■	□	■	□
8	□	■	□	■	□	■	□	■

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■	■	■	■	■	■	■	■
2	□	□	□	□	□	□	□	□
3	■	■	■	■	■	■	■	■
4	□	□	□	□	□	□	□	□
5	■	■	■	■	■	■	■	■
6	□	□	□	□	□	□	□	□
7	■	■	■	■	■	■	■	■
8	□	□	□	□	□	□	□	□

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	□	□	□	□	□	□	□	□
2	■	■	■	■	■	■	■	■
3	□	□	□	□	□	□	□	□
4	■	■	■	■	■	■	■	■
5	□	□	□	□	□	□	□	□
6	■	■	■	■	■	■	■	■
7	□	□	□	□	□	□	□	□
8	■	■	■	■	■	■	■	■

Тогда вторым ходом берём только полностью чёрные строки (с нечётными номерами) и меняем в них цвет всех клеток. После этого доска станет полностью белой!

За один ход перекрасить нельзя. Предположим, что нам удалось это сделать. Тогда среди прочих была выбрана строка (или столбец) с номером 1 (иначе нельзя перекрасить клетку (1,1)). Но эта строка (или столбец) содержит белые клетки, которые после пере-



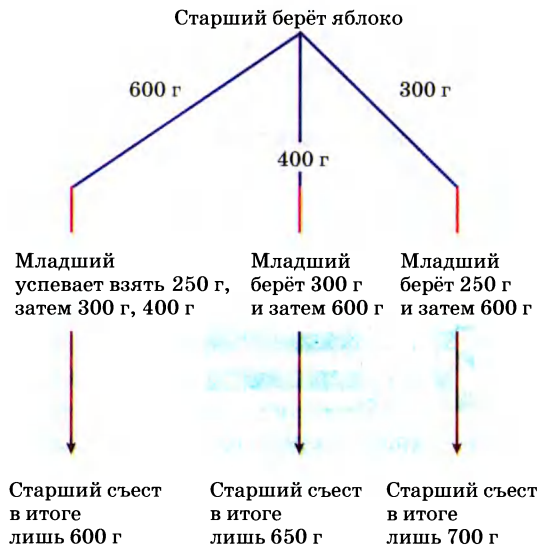
Решения

крашивания станут чёрными. Противоречие. Значит, наименьшее число ходов, за которое можно перекрасить всю доску в белый цвет, равно 2.

Ответ: А.



16. Это кажется удивительным, но старший брат должен вначале взять самое маленькое яблоко! В этом случае он может гарантированно съесть не менее 850 г. Ведь если младший брат не взял вначале яблоко 600 г, то старший, съев маленькое яблоко первым, берёт самое большое. Если же младший вначале взял большое яблоко, то старший успеет съесть два яблока 250 г и 300 г и возьмёт оставшееся яблоко 400 г первым (в сумме съест 950 г). Покажем, что, взяв любое другое яблоко вначале, старший брат не может гарантированно съесть более 850 г. Изобразим возможные действия братьев в виде диаграммы:



Итак, правильной стратегией для старшего брата является «взять вначале самое маленькое яблоко весом 250 г».

Ответ: D.

17. Достаточно разрезать фигуру всего лишь на две части, чтобы из них можно было сложить квадрат 6×6 . Пример такого разрезания (на синюю и красную части) показан на рисунке ниже.



Ответ: А.

18. Выберем одного из игроков. За одну игру он может сыграть в одной команде не более чем с 5 другими. Значит, двух игр не хватит, так как всего есть 11 ребят, с которыми он должен сыграть в одной команде. Покажем, что хватит трёх игр!

Для этого достаточно разделить ребят на четыре группы А, В, С и D по 3 игрока в каждой группе и провести следующие три игры:

1. А и В против С и D
2. А и С против В и D
3. А и D против В и С

Ответ: А.

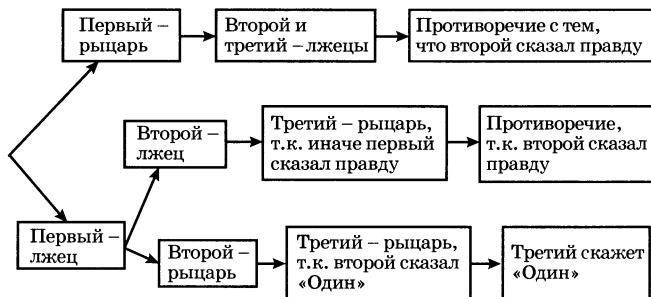
19. Могут ли слова первого быть правдой? Предположим, что это так. Тогда второй и третий — лжецы. Но в этом случае второй сказал правду, ведь среди его спутников ровно один рыцарь (первый житель острова). Получаем противоречие с тем, что второй — лжец. Поэтому первый житель является лжецом. При этом среди двух других жителей есть хотя бы один рыцарь.

Предположим теперь, что второй также лжец. Тогда третий, как мы знаем, должен быть рыцарем. Но в этом случае второй сказал правду (среди его спутников ровно один рыцарь). Получаем противоречие с тем, что второй — лжец. Поэтому второй житель является рыцарем и он сказал правду, то есть третий также рыцарь и он скажет «Один».



Решения

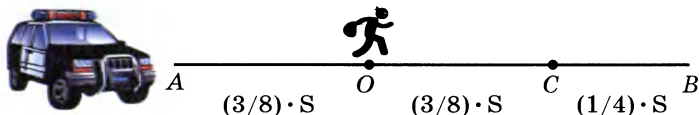
Наши рассуждения удобно изобразить с помощью схемы:



Ответ: В.



20. Пусть S — длина моста. Преступник находился в точке O моста AB (см. рисунок), для которой $AO = (3/8) \cdot S$, $OB = (5/8) \cdot S$.



Отметим точку C на участке OB , для которой $OC = OA = (3/8) \cdot S$. По условию если преступник побежит назад, то встретит автомобиль у начала моста. Это означает, что если преступник побежит вперёд, то он окажется в точке C в тот момент, когда автомобиль будет у начала моста. При этом преступнику останется преодолеть четверть длины моста, а автомобилю — всю длину моста. Но по условию автомобиль и преступник окажутся у конца моста (в точке B) одновременно. Значит, скорость преступника ровно в 4 раза меньше скорости автомобиля, то есть равна 15 км/ч.

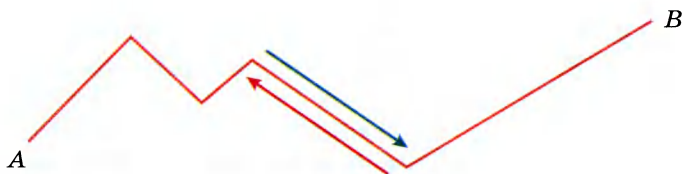
Комментарий: мы предполагали, что автомобиль будет двигаться по мосту с той же постоянной скоростью 60 км/ч. Подумайте, как изменится ответ, если автомобиль не может двигаться по мосту со скоростью более v км/ч?

Ответ: В.

21. Так как всего было 3 кружки крупы и предполагается, что все охотники ели поровну, то на каждого охотника приходится по одной кружке крупы. Получается, что первый охотник одну из своих кружек крупы отдаёт третьему. Взамен он должен получить все семь патронов!

Ответ: D.

22. Кажется, что достаточно взять среднее арифметическое двух чисел $(30 + 60)/2 = 45$ км/ч, однако это неверно! Давайте подсчитаем. Пусть S км — расстояние между сёлами A и B по горной дороге. Тогда, если в пути от A до B автобус ехал по какому-то участку дороги под гору, на обратном пути автобус проехал тот же участок в гору (см. рисунок), и наоборот.



Значит, на всём пути от A до B и обратно автобус ехал ровно S км в гору и S км под гору. Затраченное время на путь в гору равно $S/30$ часов, а на путь под гору $S/60$ часов. Тогда *средняя скорость на всём пути* равна

$$\begin{aligned} & (\text{весь путь})/(\text{всё затраченное время}) = \\ & = 2S/(S/30 + S/60) = 2/(1/30 + 1/60) = 40 \text{ км/ч.} \end{aligned}$$

Комментарий: это так называемое *среднее гармоническое* двух чисел 30 и 60. Среднее гармоническое двух различных положительных чисел всегда меньше их среднего арифметического. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Ответ: A.

23. Пусть магазин закупает оптом по цене x и продаёт в розницу по цене y . Тогда прибыль от продажи двух колпаков со скидкой 20% равна $0,8 \cdot 2y - 2x$, а прибыль от продажи трёх колпаков со скидкой 30% равна $0,7 \cdot 3y - 3x$. По условию магазин имеет одинаковую прибыль с каждой продажи со скидкой, поэтому



Решения

$$0,8 \cdot 2y - 2x = 0,7 \cdot 3y - 3x \Rightarrow x = 0,5y$$

Итак, $y = 2x$ и розничная цена в два раза (то есть на 100%) больше закупочной.

Ответ: D.



24. Ясно, что, перед тем как проснулся третий крестьянин, было всего 12 картофелин (третий крестьянин съел 4 картофелины, и их стало 8). Тогда, перед тем как проснулся второй крестьянин, было 18 картофелин (второй крестьянин съел 6 картофелин, и их стало 12), а перед тем как проснулся первый крестьянин, было 27 картофелин (первый крестьянин съел 9 картофелин, и их стало 18).

Итак, в самом начале было всего 27 картофелин и каждый должен был съесть по 9 штук. Первый съел свою долю. Второй должен съесть ещё 3, а третий — ещё 5 картофелин, чтобы все в итоге съели поровну. Значит, второй берёт три, а остальные берёт третий.

Ответ: C.



25. Заметим, что каждый чёрный пятиугольник граничит с пятью белыми шестиугольниками. При этом каждый белый шестиугольник мы сосчитали трижды (так как каждый белый шестиугольник граничит ровно с тремя чёрными пятиугольниками, см. рисунок).



Значит, всего число белых шестиугольников должно быть равно $(12 \cdot 5)/3 = 20$.

Комментарий: для решения можно и не знать, что чёрных пятиугольников ровно 12. Достаточно воспользоваться формулой Эйлера для многогранников: $V + Г - Р = 2$ (V — число вершин, $Г$ — число граней, $Р$ — число рёбер многогранника). Пусть всего имеется n пятиугольников. Тогда шестиугольников должно быть $5n/3$. Далее, $Г = n + 5n/3$, $Р = (5n + 6 \cdot 5n/3)/2$ (делим на 2, так как каждое ребро мы сосчитали дважды), $V = (5n + 6 \cdot 5n/3)/3$ (делим на 3, так как каждую вершину мы сосчитали трижды). Подставляя в формулу Эйлера, получаем: $5n + n + 5n/3 - 15n/2 = 2 \Rightarrow n = 12$. При этом $5n/3 = 20$.

Ответ: C.

26. Покажем, что выигрышной стратегии ни у кого нет, то есть любые двое всегда могут помешать оставшемуся игроку выиграть. Если двое играют против Алекса, то Бен и Карл могут каждый раз дополнять общее количество карт, которое взяли в этом круге, до 4. То есть, если Алекс взял одну карту, Бен и Карл берут одну и две соответственно. Если же Алекс взял две карты, то Бен и Карл берут по одной. Заметим, что 52 делится на 4, после каждого круга количество карт уменьшается на 4, и в итоге последнюю карту возьмёт Карл, как бы ни старался Алекс.



Если двое играют против Бена, то Алекс первым ходом берёт 2 карты, оставляя 50 карт в колоде. После этого Карл и Алекс вместе дополняют количество карт, которое взял Бен, до 5 (50 делится на 5). В этом случае последнюю карту всегда возьмёт Алекс.

Наконец, если двое играют против Карла, то Алекс и Бен вначале берут по одной карте, а дальше вдвоём дополняют количество карт, которое взял Карл, до 5. В итоге, последнюю карту возьмёт Бен.

Ответ: D.

27. Первым взвешиванием эксперт должен отмерить 1 г песка. После этого он может положить на одну чашу кучку песка весом 1 г и гирьку 1 г и уравновесить общий груз кучкой песка весом 2 г (второе взвешивание). Третьим взвешиванием эксперт может отмерить 4 г, четвёртым — 8 г, и т. д. (после каждого взвешивания количество песка, которое можно отмерить, удваивается). Седьмым взвешиванием можно отмерить 64 г песка. Теперь, объединив кучки 64 г, 32 г и 4 г, эксперт получит ровно 100 г золотого песка. Меньшим количеством взвешиваний обойтись не удастся, так как после каждого взвешивания общее количество отмеренного песка не более чем удваивается, и через 6 взвешиваний будет не больше чем



$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 < 100 \text{ г.}$$

Комментарий: мы предполагаем, что эксперт может не допустить смешивания песка из разных кучек при взвешивании.

Заметим также, что эта задача связана с представлением числа 100 в двоичной системе счисления.

Ответ: А.



28. Команд, которые не одержали ни одной победы, не может быть больше одной. Ведь если таких команд две или более, то они сыграли друг с другом и какая-то одна из них победила (ничьих в волейболе нет). Противоречие.

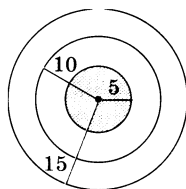
Итак, 1 команда — это 20% от их общего числа. Значит, всего было 5 команд.

Ответ: С.



29. Длина рулона обоев — это примерно площадь поперечного сечения рулона, делённая на толщину обоев. Поэтому, чтобы узнать, какую часть рулона мы истратили, подсчитаем, во сколько раз уменьшилась площадь поперечного сечения.

Сечение рулона — это кольцо, поэтому его площадь — разность площадей кругов, ограниченных внешней и внутренней окружностями (напомним: площадь круга радиуса r — πr^2)



Площадь всего рулона равна

$$\pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 200\pi \text{ см}^2.$$

Площадь оставшейся части составляет

$$\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 75\pi \text{ см}^2,$$

то есть $75/200 = 3/8$ от всего рулона.

При этом израсходованной части ($5/8$ рулона) хватило на половину комнаты. Поэтому оставшейся части хватит на $(1/2) \cdot (3/8) : (5/8) = 3/10$ комнаты.

Ответ: В.



30. Рассмотрим 25 нечётных пар с суммой 100, то есть (1, 99), (3, 97), (5, 95), ..., (49, 51), и 24 чётные пары с суммой 100: (2, 98), (4, 96), ..., (48, 52). В каждой паре не может быть более одного отмеченного числа.

Ясно также, что если число 50 отмечено, то нельзя отмечать другие чётные числа, и всего отмеченных чисел не может быть более 26. Кроме того, если хотя бы одно из чисел в паре (25, 75) отмечено, то среди чёт-

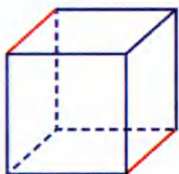
Решения

ных чисел нельзя отмечать те, которые делятся на 4, и всего отмеченных чисел не может быть больше чем $25 + 12 = 37$.

Рассмотрим теперь чётные пары (10, 90), (20, 80), (30, 70), (40, 80). Среди этих 8 чисел не может быть более одного отмеченного, иначе их произведение делится на 100. Поэтому всего отмеченных чисел не может быть более 24 (в нечётных парах) + 21 (в чётных парах) = 45. Пример, когда отмечены все нечётные числа от 1 до 49, кроме 25, и все чётные числа от 2 до 48, кроме 20, 30 и 40, удовлетворяет условию задачи.

Ответ: С.

31. Покажем, что выигрышная стратегия есть у второго игрока. Для этого своим первым ответным ходом он должен разрезать коробку вдоль ребра, противоположного тому, вдоль которого разрезал коробку первый (для примера, два таких противоположных ребра на рисунке выделены красным цветом). Тогда после следующего хода первого какая-то из граней коробки обязательно будет разрезана вдоль двух рёбер, и второму достаточно разрезать коробку вдоль третьего ребра этой же самой грани, чтобы забрать приз!



Ответ: В.

32. Из условия задачи следует, что от одного дома до другого дома Вася проходит не более 500 метров. Также ясно, что если Вася посетил по очереди два дома, то он прошёл не более $500 + 400 = 900$ метров, так как Вася не может вернуться в тот же самый дом. Поэтому Вася не может пройти более чем $500 + 900 + 900 + 900 + 900 = 4100$ метров = 4,1 км.



На рисунке указаны дома и порядок, в котором их может выбрать Вася. При этом он пройдёт ровно 4,1 км.

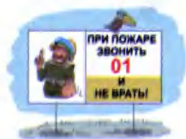
Ответ: В.

33. Пусть в мешке было всего x монет. Первый взял $0,3x$, после чего в мешке осталось $0,7x$ монет. Затем



второй взял $0,4 \cdot 0,7x = 0,28x$, после чего в мешке осталось $0,7x - 0,28x = 0,42x$. Затем третий взял $0,5 \cdot 0,42x = 0,21x$, после чего в мешке осталось $0,21x$ монет. Но по условию там осталось 63 монеты, то есть $0,21x = 63 \Rightarrow x = 300$.

Ответ: А.



34. Звонивший не может быть жителем города А, так как его второе утверждение противоречит первому. Звонивший не может быть жителем города С, так как в этом случае его утверждения «у нас пожар» и «пожар в городе С» или оба истинны, или оба ложны. Но житель города С попеременно говорит то ложь, то правду. Противоречие. Значит, звонивший — из города В, и все его утверждения — ложь. Отсюда, если пожар действительно имеет место, он не в В и не в С. Поэтому пожарным нужно ехать в город А.

Ответ: А.



35. Пусть v — скорость Васи относительно эскалатора, u — скорость самого эскалатора. По условию Вася пробежал расстояние, равное длине эскалатора, со скоростью $v - u$ в 4 раза медленнее, чем со скоростью $v + u$, так как он насчитал в 4 раза больше ступенек.

Итак, $4 \cdot S/(v + u) = S/(v - u) \Rightarrow 4(v - u) = v + u \Rightarrow u = (3/5) \cdot v$.

Отсюда, $S/(v + u) = 5/8 \cdot S/v$, что соответствует времени, за которое Вася пробежал 20 ступенек. По неподвижному эскалатору Вася пробежал бы за время S/v , что в $8/5$ раз больше. При этом он насчитал бы в $8/5$ раз больше ступенек. Поэтому на неподвижном эскалаторе должно быть $(8/5) \cdot 20 = 32$ ступеньки.

Ответ: А.



36. В этой задаче очень важно внимательно прочитать условие! У равностороннего шестиугольника все стороны равны, а углы при этом могут быть и не равны. Не нужно путать равносторонний шестиугольник с правильным шестиугольником, у которого все стороны равны и все углы равны.

Нужный нам равносторонний шестиугольник легко получить из двух одинаковых равнобедренных прямо-

Решения

угольных треугольников, сложив их так, как показано на рисунке. Возьмём квадрат со стороной 1, разрежем его диагональю на 2 равных треугольника и сместим один из треугольников вдоль диагонали квадрата на расстояние 1.



Мы получили равносторонний невыпуклый шестиугольник, который можно разрезать лишь на 2 одинаковых треугольника!

Ответ: А.

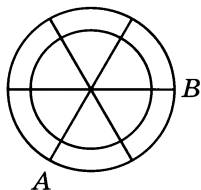
37. Пусть на острове живут x взрослых мужчин и y взрослых женщин. Из условия следует, что $0,6x$ взрослых мужчин и $0,4y$ взрослых женщин состоят в браке. Но эти числа должны быть равны (мужчины и женщины в браке образуют пары), то есть $0,6x = 0,4y \Rightarrow y = 1,5x$. Доля взрослого населения, которая не состоит в браке, равна

$$(0,4x + 0,6y)/(x + y) = (0,4x + 0,9x)/2,5x = 1,3/2,5 = 0,52, \text{ или } 52\%.$$



Ответ: С.

38. Пусть радиусы малой и большой кольцевых автодорог равны r и R соответственно. Тогда длина пути из A в B по внешней кольцевой автодорожке равна $2\pi R/3$, а длина пути из A в B по внутренней кольцевой равна $2 \cdot (R - r) + 2\pi r/3$. Первое слагаемое получается, поскольку часть пути проходит по двум дорогам, которые сходятся в центре города.



Итак, нужно сравнить:
 $2\pi R/3$ и $2 \cdot (R - r) + 2\pi r/3$.



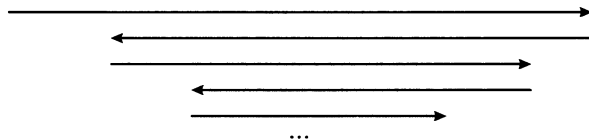
Решения

Ясно, что $2\pi(R-r)/3 > 2 \cdot (R-r)$, так как $\pi > 3$.

Поэтому путь из A в B по внутренней кольцевой автодороге будет короче.

Ответ: В.

39. На рисунке схематично изображена траектория движения Шарика.

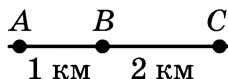


Нужно найти сумму длин всё уменьшающихся отрезков на рисунке (сумму ряда). Однако всё гораздо проще! 1 км до встречи братья преодолели за $1/10$ ч. Всё это время Шарик находился в движении. Значит, Шарик пробежал $(20 \text{ км/ч}) \cdot (1/10 \text{ ч}) = 2 \text{ км}$.

Ответ: В.



40. Пусть X — произвольная точка на отрезке AB . Заметим, что половина интересующей нас суммы равна $80 \cdot |XA| + 50 \cdot |XB| + 30 \cdot |XC| = 50 \cdot (|XA| + |XB|) + 30 \cdot (|XA| + |XC|) = 50 \cdot |AB| + 30 \cdot |AC| = 50 + 30 \cdot 3 = 140$ км и не зависит от выбора точки X на отрезке AB . Также легко проверить, что если брать точку X вне отрезка AB , то общее расстояние будет больше 140 км.



Итак, школу можно строить в любой точке на отрезке AB . Так как среди приведённых ответов нет подобного, то правильный ответ D (правильный ответ другой).

Комментарий: нужно было найти все возможные варианты.

Ответ: D.

41. Пусть скорость, с которой мама печёт блины, равна v блинов в час, а скорость, с которой каждый



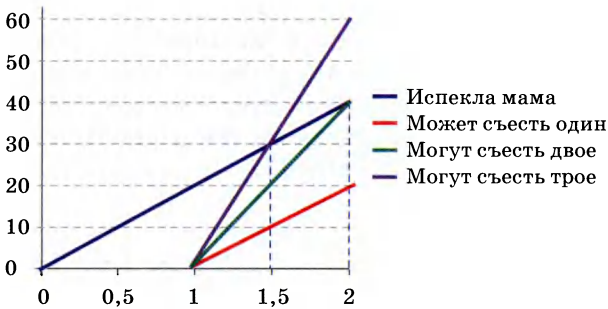
из сыновей или папа поедают блины, равна u блинов в час. Заметим, что u и v могут не быть целыми числами. Например, если мама печёт 1 блин за 7 минут, то она успеет за час испечь 8 блинов и у неё ещё остаётся в запасе 4 минуты, то есть эта скорость равна 8 целых и $4/7$ блина в час.

Пусть отец и два сына пришли на кухню через t ч. Тогда по условию:

1) $v \cdot (t + 0,5) = 3u \cdot 0,5$ (через полчаса отец и два сына съели все блины, которые успела испечь мама к этому моменту),

2) $v \cdot (t + 1) = 2u \cdot 1$ (через час два сына съели бы все блины, которые успела испечь мама к этому моменту).

Вычитая из второго равенства первое, получаем, что $v = u$, то есть отец ест с той же скоростью, с которой мама печёт блины, и блины не закончились бы никогда (в любой момент времени, когда мама печёт, а папа ест, блины остаются)! На рисунке изображён частный случай для $v = 20$ блинов в час. Видно, что красная и синяя линии параллельны.



Комментарий: мы предполагали, что скорости u и v не зависят от времени. В реальности это не так: мама устаёт, а папа насыщается и не в состоянии съесть больше определённого количества блинов. Мы имеем дело с очень упрощённой «математической моделью» реального процесса.

Ответ: Е.



42. Кажется, что оптимальным является способ, при котором самый быстрый (папа) по очереди переводит всех остальных, каждый раз возвращаясь назад с фонариком. При этом затраченное время будет равно $10 + 1 + 5 + 1 + 2 = 19$ мин. Однако можно быстрее! Основная идея заключается в том, чтобы двое самых медленных (мама и бабушка) шли по мосту вместе. При этом на другом берегу уже должен быть кто-то более быстрый, чтобы вернуться назад с фонариком. Итак, сначала идут папа и мальчик, мальчик остаётся, а папа возвращается назад с фонариком. Затем идут мама и бабушка вместе, а мальчик возвращается назад с фонариком. Наконец, папа и мальчик вместе переходят на другой берег. Всего получаем $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ мин.

Ответ: С.



43. После каждого боя из соревнований выбывает один боксёр — проигравший в этом бою. Поскольку всего к концу соревнований должны выбыть все кроме победителя, всего должно быть 99 боёв, независимо от того как составляется расписание!

Ответ: А.



44. Пример расстановки 16 крестиков показан на рисунке 1. Разделим поле 5×5 так, как показано на рисунке 2. Ясно, что в каждом прямоугольнике 2×3 не более 4 крестиков. Поэтому всего крестиков не может быть больше чем $4 \times 4 + 1 = 17$.

X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X
X	X		X	X

Рис. 1

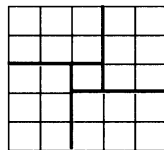


Рис. 2

Предположим, что удалось так расставить 17 крестиков. Тогда из рисунка 2 ясно, что в центральной клетке должен стоять крестик.

Тогда в каждой из восьми пар синих и красных клеток на рисунке 3 по одну сторону от центрального кре-

стика может стоять не более одного крестика. Поэтому в белых клетках должны стоять крестики и в каждой из 8 пар синих и красных клеток стоит ровно по одному крестику (иначе всего крестиков меньше 17).



Рис. 3

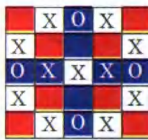


Рис. 4

Ясно, что клетки, помеченные буквой О, пустые (иначе есть вертикальный ряд из трёх крестиков). Но тогда другие клетки этих двух пар заняты крестиком (см. выше). Поэтому есть центральный ряд из трёх крестиков (рисунок 4). Получаем противоречие. Значит, нельзя расставить требуемым образом больше 16 крестиков.

Ответ: В.

45. Покажем, что трёх гирек не хватит. Пусть у нас имеется три гири весом a , b и c граммов. Тогда для каждой из этих гирек есть 3 варианта: положить на левую чашу весов, положить на правую чашу, не класть на весы. Всего возможно не более чем $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ комбинаций. Значит, не более 27 вариантов для веса золотого песка, который уравновешен соответствующей комбинацией гирек. Но у нас 40 различных вариантов, которые нужно уравновесить (1 г, 2 г, 3 г, ..., 39 г, 40 г). Значит, тремя гирьками явно не обойтись.

Однако четырёх гирек хватит! Для этого достаточно взять гири, вес которых является степенью числа 3, то есть 1 г, 3 г, 9 г и 27 г. С помощью этого набора эксперт сможет отмерить 1 г, 2 г, 3 г, ..., 39 г, 40 г золотого песка (любое целое число от 1 до 40) за одно взвешивание. Отмерить вес — то же самое, что создать требуемую разницу между весами грузов на разных чашах. С помощью гири в 27 г можно уменьшить эту разницу до не более чем 13 г. Потом с помощью гири в 9 г уменьшить разницу до 4 г или меньше, а затем уравновесить остаток гирьками в 3 г и 1 г.

Пусть, например, ему нужно отмерить ровно 34 г. Для этого можно положить гири 27 г, 9 г, 1 г



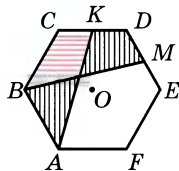
на первую чашу весов, а гирьку 3 г на вторую. Тогда вес золотого песка на второй чаше, который уравновесит гирьку, равен $27 + 9 + 1 - 3 = 34$ г.

Комментарий: на самом деле, верно более общее утверждение: гирьками 1 г, 3 г, 9 г, ..., 3^{n-1} г можно уравновесить любой груз 1 г, 2 г, 3 г, ..., $(3^n - 1)/2$ г. Доказать это утверждение можно методом математической индукции.

Ответ: В.



46. Пусть O — центр шестиугольника $ABCDEF$ (см. рисунок). Заметим, что при повороте на 60° вокруг точки O четырёхугольник $ABCK$ переходит в четырёхугольник $BCDM$, так как вершины одного четырёхугольника переходят в соответствующие вершины другого. Поэтому и площади этих четырёхугольников равны. Убирая их общую часть (заштрихована красным цветом), получаем, что Васе и Пете достались равные по объёму куски!



Ответ: А.



47. Посмотрим, шкафы с какими номерами останутся открытыми: 1, 4, 9, 16, ... Возникает предположение, что шкаф останется открытым, если его номер — квадрат натурального числа. Действительно, шкаф с номером n меняет состояние столько раз, сколько делителей у числа n . При этом шкаф окажется в итоге открытым, если n имеет нечётное число делителей. Однако делители образуют пары: если d — делитель n , то n/d — также делитель. Поэтому количество делителей нечётно лишь тогда, когда для какого-то d выполнено равенство $d = n/d$, то есть $n = d \cdot d$ (n — полный квадрат). Квадраты, не превосходящие 1000, — это $1^2, 2^2, \dots, 31^2$ (всего 31 число). Значит, всего 31 шкаф окажется открытым. Мы обошлись без компьютера и даже без калькулятора!

Ответ: В.



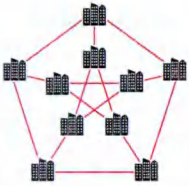
48. Заметим, что у логика A не может быть шестёрки и не может быть туза, так как иначе A ответил бы на заданный вопрос «нет» или «да» соответственно,

тогда как он ответил «не знаю». Далее, у логика *B* не может быть шестёрки, семёрки, короля или туза, так как иначе *B* не ответил бы на заданный вопрос «не знаю», обладая информацией, что у *A* нет ни шестёрки, ни туза. У логика *C* не может быть шестёрки, семёрки, восьмёрки, дамы, короля или туза по той же причине. Наконец, у логика *D* не может быть шестёрки, семёрки, восьмёрки, девятки, валета, дамы, короля или туза, иначе *D* ответил бы «да» или «нет» на заданный вопрос, зная ответ *C*. Итак, у *D* может быть лишь десятка.



Ответ: В.

49. Из любого города *A* можно добраться не более чем до трёх городов, а из каждого из них не более чем до двух (не считая *A*). Таким образом, всего городов не более $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$. Пример на рисунке показывает, что нужная система авиалиний в государстве с 10 городами существует (рёбра графа на рисунке соответствуют авиалиниям).



Ответ: С.

50. Пусть Холмс поставил a , b и c фунтов на лошадей Аллу, Бэллу и Виолу соответственно. Если Алла придёт первой, его выигрыш (или проигрыш) составит $(a - b - c)$. Если Бэлла придёт первой — $(2b - a - c)$, если Виола — $(6c - a - b)$. Мы хотим, чтобы результат не зависел от исхода скачек. Иначе Холмс мог бы, изменив ставки, уменьшить наибольший выигрыш и увеличить наименьший. Поэтому приравниваем возможные выигрыши и получаем:

$2a - (a + b + c) = 3b - (a + b + c) = 7c - (a + b + c)$,
то есть

$$2a = 3b = 7c. \quad (1)$$

Кроме того всего у нас 205 фунтов, то есть

$$a + b + c = 205. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим $a = 105$, $b = 70$, $c = 30$. Распределив так ставки, Холмс получит чистую при-



быль $105 - 30 - 70 = 5$ фунтов независимо от того, какая лошадь придёт первой!

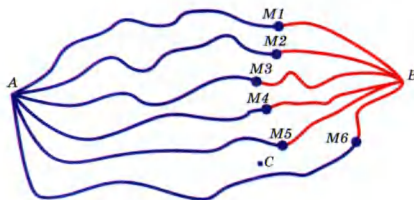
Убедитесь самостоятельно, что при любом другом распределении ставок Холмс не может себе гарантировать выигрыш даже в 5 фунтов.

Ответ: С.

51. Пример с двумя океанами легко придумать. Пусть 6 материков расположены вдоль экватора, а два океана находятся в северном и в южном полушарии соответственно. Тогда ясно, что все условия задачи будут выполнены.



Предположим, что океанов 3 или больше. Пусть точки A , B и C принадлежат трём разным океанам. По условию от A можно построить путь до некоторой точки каждого материка ($M1$, $M2$, $M3$, $M4$, $M5$, $M6$), причём путь проходит лишь по этому матерiku и океану.

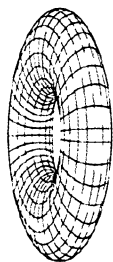


То же самое верно и для B . Тогда получаем подобную картинку на поверхности шара:

Пути разбивают поверхность шара на 6 областей, и точка C принадлежит одной из них. Например так, как показано на рисунке (остальные случаи аналогичны). Но тогда от C нельзя построить путь до точки $M4$, который не пересекал бы построенных путей, то есть третий океан не может граничить с каждым из материков. Это противоречие означает, что океанов не может быть больше двух.

Комментарий: здесь мы воспользовались теоремой Жордана, которая кажется очевидной, но доказать которую очень сложно. Формулировка этой теоремы такова: простая (то есть не имеющая самопересечений) замкнутая кривая на сфере разбивает её на две связные части и является их общей границей.

Заметим, что похожее утверждение не выполняется, например, для такой поверхности, как «тор» (поверхность бублика, см. рисунок).



Если провести одну из поперечных окружностей, то поверхность тора не будет разделена на две части: из любой точки поверхности можно попасть в любую другую, не пересекая проведённую окружность. Свойствами сложных поверхностей занимается раздел математики, который называется «топология».

Ответ: В.

52. Будем анализировать позиции, начиная с тех, которые ближе всего к правой верхней клетке, и отступая всё ниже и ниже. Так позиция, когда король находится в одной из клеток, примыкающих к правой верхней, выигрышная. Если игрок там оказался, то он ставит короля на поле (8,8) и выигрывает. Позиции (6,8) и (8,6) проигрышные, так как с этих клеток можно попасть только на позицию, выигрышную для другого игрока.



	1	2	3	4	5	6	7	8
8	В	П	В	П	В	П	В	Х
7	В	В	В	В	В	В	В	В
6	В	П	В	П	В	П	В	П
5	В	В	В	В	В	В	В	В
4	В	П	В	П	В	П	В	П
3	В	В	В	В	В	В	В	В
2	В	П	В	П	В	П	В	П
1	В	В	В	В	В	В	В	В

Все клетки диагонали (8,5), (7,6), (6,7), (5,8) соответствуют выигрышным позициям, так как с них можно переместить короля в позицию, проигрышную для другого игрока. Далее смотрим на клетки следующей диагонали. Видим, что проигрышные и выигрышные позиции

там будут чередоваться. Заполняя всю таблицу таким же образом (В — выигрышная позиция, П — проигрышная), замечаем, что все клетки первой горизонтали соответствуют выигрышным позициям.

Значит, у первого игрока есть выигрышная стратегия вне зависимости от того, на какой клетке первой горизонтали стоит король!

Ответ: А.

53. Будем решать задачу «с конца». Сначала определим наименьшее время, которое требуется, чтобы доехать от каждого из перекрёстков на прямой 7 до В (последний шаг), затем от каждого из перекрёстков



на прямой 6 до B (предпоследний шаг) и т. д. (см. рисунок). При этом в каждом узле записываем наименьшее время от этого узла до B и стрелочкой указываем, в каком направлении нужно двигаться из этого узла, чтобы путь до B был оптимальным.



Теперь можно, двигаясь от A до B по стрелочкам, получить оптимальный маршрут (всего будет ровно два оптимальных маршрута). При этом наименьшее затраченное время будет равно 14 минутам.

Комментарий: использованный метод называется «динамическим программированием».

Ответ: С.

54. Всего имеется 10^7 различных семизначных номеров, так как каждую из 7 цифр можно выбрать 10 способами (номер может начинаться с нуля). Для того чтобы получился «редкий» номер, первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую — 9 способами, третью — 8 способами, ...

Поэтому число возможных комбинаций для «редкого» номера равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Значит, доля «редких» номеров равна $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 / 10^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 / 10^5 \approx 0,06$, то есть около 6%. Поэтому Вова прав, и номер действительно редкий.

Ответ: Е.

55. Ясно, что объём грейпфрута — это объём шара радиуса 5 см, тогда как объём его съедобной части — это объём шара радиуса 4 см. Для решения задачи совсем не обязательно знать формулу объёма шара.

Достаточно понимать, что отношение объёмов двух подобных фигур в пространстве равно k^3 , где k — коэффициент подобия этих фигур (отношение длин соответствующих линейных элементов этих фигур).





Например, в случае подобных пирамид (см. рисунок) k равно отношению длин оснований этих пирамид. В нашем же случае k равно отношению радиусов шаров $4/5$ и поэтому доля съедобной части составляет $(4/5)^3 = 64/125 \approx 0,5$. Итак, лишь примерно половина такого грейпфрута съедобна, что на первый взгляд кажется удивительным.

Ответ: D.

56. Пусть $x = ab$ — задуманное двузначное число. Тогда $P(x) = a \cdot b$ — произведение его цифр. Так как Петя берётся угадать задуманное число с трёх попыток, то число P должно раскладываться на два множителя ровно тремя способами, учитывая порядок множителей. Следовательно,

1) $b \neq 0$ (иначе $P = 0 = a \cdot 0$ при любом a от 1 до 9, то есть указанных способов 9);

2) для чисел ab и ba значение P одно и то же, поэтому P должно быть квадратом какой-то из цифр (иначе P раскладывается указанным образом чётным количеством способов).

Таким образом, достаточно рассмотреть квадраты всех цифр и выписать все способы из указанного разложения на множители (множители должны быть меньше 10, так как это цифры числа). При этом нас интересуют лишь те варианты, где получается 3 возможных ответа для самого числа x , ведь Пете нужно ровно 3 попытки, чтобы заведомо угадать число. Для каждого из возможных ответов x найдём сумму цифр $S(x)$ числа x и получим такую таблицу:

$P(x)$	1·1	2·2	3·3	4·4	5·5	6·6	7·7	8·8	9·9
x	11	14 22 41	19 33 91	28 44 82	55 49 66 94	77 88 99			
$S(x)$	2	5 4 5	10 6 10	10 8 10	13 12 13				

Так как теперь Саше требуется четыре попытки, чтобы заведомо угадать задуманное число, то искомая сумма цифр должна быть равна 10. Лишь в этом случае есть 4 возможных варианта для самого числа:



(19, 91, 28 и 82). Заметим, что при этом само число x мы определить не можем.

Ответ: В.



57. По условию точка A совпадает с серединой A' стороны CD . Поэтому часть квадрата симметрично отражается относительно срединного перпендикуляра MN к отрезку AA' (красная линия на рисунке). Требуется найти площадь невыпуклого шестиугольника $MNB'KCD$. Пусть $MD = x$. Тогда $MA' = MA = 1 - x$.

Поэтому из прямоугольного треугольника MDA' по теореме Пифагора $x^2 + (1/2)^2 = (1 - x)^2 \Rightarrow x = 3/8$

Пусть теперь $NB = NB' = y$. В силу симметрии $AN = A'N$. Поэтому по теореме Пифагора для треугольников $NB'A'$ и NCA' имеем

$$1 + y^2 = (1/2)^2 + (1 - y)^2 \Rightarrow y = 1/8.$$

Заметим, что искомая площадь складывается из площади трапеции $NCDM$, которая равна $(7/8 + 3/8)/2 = 5/8$, и площади маленького треугольника $NB'K$. Далее треугольники MDA' , $A'CK$ и $NB'K$ подобны (это прямоугольные треугольники, у которых соответствующие углы равны), поэтому $KB'/NB' = A'D/MD = 4/3$. Отсюда $KB' = 4/3 \cdot NB' = 1/6$.

Поэтому площадь маленького треугольника $NB'K$ равна $(1/2) \cdot (1/8) \cdot (1/6) = 1/96$. Отсюда искомая площадь равна $5/8 + 1/96 = 61/96$.

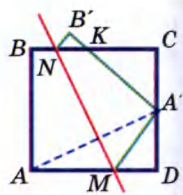
Ответ: D.



58. Покажем, что в любой из турфирм две путёвки на двоих стоят столько же, сколько путёвки на одного и на троих вместе. Действительно, постоянные издержки будут одни и те же — на две путёвки, и переменные тоже — на четырёх человек. Аналогично, совпадает и прибыль — неважно, берётся она с количества путёвок или туристов.

Значит, по стоимости путёвок на двоих и на троих мы можем восстановить стоимость путёвки на одного. Поскольку путёвки на двоих или на троих стоят одинаково в разных фирмах, путёвки на одного в разных фирмах также будут стоять одинаково.

Ответ: С.



59. Пусть первый продавец завышает все числа в x раз, а второй — в y раз (x и y могут быть и меньше 1, в этом случае цену занижают). Тогда по условию получаем, что должны выполняться два равенства для x и y :

$$x = 3/y,$$

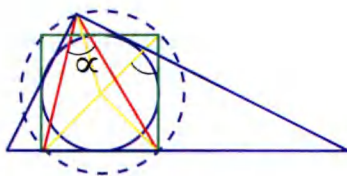
$$y = 1/(12/x) = x/12.$$

Подставляя выражение для y из второго равенства в первое, получаем: $x \cdot x = 36$. Отсюда $x = 6$, так как $x > 0$. Итак, на самом деле первый продавец завышает все числа в 6 раз, то есть часы стоят 2 тысячи рублей.

Ответ: А.

60. Опишем около вписанной окружности квадрат, одной из сторон которого является проекция этой окружности на гипотенузу.

Заметим, что если радиус вписанной окружности равен r , то длина каждого из жёлтых отрезков равна $\sqrt{2} \cdot r$. Значит, вершина прямого угла треугольника лежит на окружности, описанной около квадрата (штриховая окружность на рисунке). Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Поэтому искомый угол α равен углу между диагональю квадрата и стороной, то есть 45° .



Ответ: В.

61. Пусть в сундуке было n серебряных и n золотых монет. Тогда всего было $n + 10n = 11n$ дукатов. Заметим, что по условию число $11n - 7$ делится на 9, а $11n - 3$ делится на 7. Но тогда $11n + 11 = 11(n + 1)$ делится на 63. Поэтому $n = 63k - 1$. Также по условию $n \leq 1000/11 < 100$. Поэтому k может быть равно лишь 1. Отсюда $n = 62$, и в сундуке было 62 серебряные и 62 золотые монеты, а всего 124.

Ответ: В.





62. Ясно, что двадцать сотрудников с наибольшей зарплатой должны быть лжецами (для правдолюбца второе утверждение было бы ложным), а остальные должны быть правдолюбцами (для лжеца второе утверждение было бы истинным). Сколько всего может быть правдолюбцов?

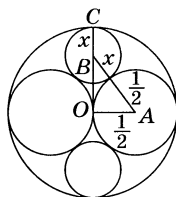
Опять же, для 10 сотрудников с наибольшей нагрузкой первое утверждение истинно, а для остальных — ложно. Поэтому на кафедре ровно 10 правдолюбцов и 20 лжецов, причём лжецы работают меньше правдолюбцов, а получают больше. Это и есть пример, удовлетворяющий условиям задачи.

Ответ: С.



63. Чтобы найти, какую часть котлеты заведомо составлял лёд, найдём максимальный возможный радиус ужаренной котлеты. Такая котлета должна касаться сковородки и не растаявших котлет, как на рисунке.

Примем радиус сковороды за 1, её центр обозначим через O . Пусть A — центр не растаявшей котлеты, B и x — соответственно центр и радиус одной из ужаренных котлет, C — точка касания этой ужаренной котлеты со сковородой. Тогда $OB = 1 - x$ и $AB = x + 1/2$. Так как картинка симметричная, то угол AOB прямой. По теореме Пифагора в треугольнике ABO имеем $(x + 1/2)^2 = (1 - x)^2 + (1/2)^2$. Откуда $x = 1/3$.



Получается, что радиус ужаренной котлеты составляет $2/3$ от радиуса не растаявшей (был радиус $1/2$, а стал $1/3$).

Так как площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса, то площадь ужаренной котлеты составляет $(2/3)^2$ площади не растаявшей. Поскольку высота котлеты не могла увеличиться, по крайней мере $1 - (2/3)^2 = 5/9$ объёма котлеты (или примерно 55%) составлял лёд.

Ответ: С.



64. Так как двузначных номеров квартир не больше чем 90, то количество подъездов не больше девяти. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Все квартиры с двузначными номерами находятся в Васином подъезде. Тогда Вася живёт в первом подъезде, квартир в нём не меньше 100, значит, этажей в доме не меньше 25. При этом по условию задачи в доме должно быть 9 подъездов. Ясно также, что в каждом подъезде не более 27 этажей, так как иначе всего квартир в доме не меньше $28 \cdot 4 \cdot 9 > 1000$, что противоречит условию. Значит, в этом случае в доме 25, 26 или 27 этажей и всего квартир 900, 936 или 972.

Случай 2: Не все квартиры с двузначными номерами находятся в Васином подъезде. Расположим номера квартир по порядку по 4 (см. рисунок).

101	102	103	104
97	98	99	100
93	94	95	96

Квартиры
в Васином подъезде

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Ясно, что в этом случае все квартиры в Васином подъезде имеют двузначные номера, так как иначе в этом подъезде нечётное число квартир с двузначными номерами, что противоречит условию. Если всего подъездов n , то квартир в Васином подъезде $10n$ по условию. Причём $10n$ должно делиться на 4 (на каждом этаже по 4 квартиры) и $10n \leq 50$

(в Васином и в первом подъезде в сумме не более 100 квартир). Поэтому в Васином подъезде 20 или 40 квартир. При этом всего квартир в доме 40 или 160.

Итак, задача имеет ровно 5 решений: 900, 936, 972, 40 и 160.

Ответ: D.

65. Пусть A — команда, которая в итоге победила, а B — проигравшая команда. Пусть t — последний момент в матче, когда команда B вела в счёте (с преимуществом хотя бы в одно очко). Ясно, что $t > 22$, так как иначе команда A вела бы в счёте больше половины времени всего матча, что противоречит условию задачи. Поэтому преимущество команды A над командой B по очкам по итогам матча не могло оказаться больше чем $-1 + 23 \cdot 3 = 68$.

Легко построить пример, когда разница в счёте по итогам матча равна 68. Пусть, например, команда B заработала 3 очка на исходе первой минуты, затем ко-

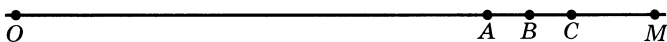


манды A и B по очереди зарабатывали по 2 очка и, наконец, команда A заработала по 3 очка на исходе 23-й, 24-й, 25-й, ..., 45-й минуты (всего $23 \cdot 3$ очков).

Ответ: С.



66. Кажется, что Петя уже доедет до Москвы через полчаса, однако это не так! Всё дело в том, что расчётная средняя скорость навигатора и реальная средняя скорость на оставшемся участке пути будут сильно различаться. Давайте подсчитаем.



Пусть Петя ехал из точки O (область) в точку M (Москва), расстояние между которыми равно S км. Когда Петя проехал $3/4$ пути, он оказался в точке A (см. рисунок). Если бы он ехал с той же скоростью на оставшемся участке пути от A до M , то проехал бы $S/4$ км за $1/4$ часа, то есть средняя скорость на участке OA была равна S км/ч. Пусть на участке AM средняя скорость была равна v км/ч, и через 15 минут Петя оказался в некоторой точке B . Навигатор считает, что оставшийся участок пути BM длиной $S/4 - v/4$ км Петя проедет с той же средней скоростью, что и участок OB . Эта средняя скорость равна $3S/4 + v/4$ км/ч. По условию:

$$\begin{aligned} (S/4 - v/4)/(3S/4 + v/4) &= 1/4 \text{ ч} \Rightarrow \\ \Rightarrow S - v &= 3S/4 + v/4 \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= 5v. \end{aligned}$$

Ещё через полчаса Петя окажется на расстоянии $3S/4 + v/4 + v/2 = 3S/4 + (3/4) \cdot (S/5) = 0,9S < S$ от точки O , то есть Петя ещё не доедет до Москвы. При этом средняя скорость на всём участке, который Петя проедет к этому моменту (к этому моменту пройдёт ровно 1,5 ч), будет равна $0,9S/1,5 = 0,6S$ км/ч. Значит, навигатор покажет расчётное время до Москвы $0,1S/0,6S = 1/6 \text{ ч} = 10 \text{ мин.}$

Ответ: А.



67. Эту задачу легко решить на клетчатой бумаге. Рассмотрим квадрат 12×12 клеток (тогда точки M и N попадут в узлы клеток, размер клетки подбирается

Решения

исходя из условия $BD = 1$). Продолжим AM до пересечения со стороной квадрата в точке K (см. рисунок).

Пусть E и F — проекции точки N на стороны AB и BC квадрата. Прямоугольные треугольники NEA и NFK равны, так как равны их соответствующие катеты. Более того, один из них переходит в другой при повороте на 90° вокруг точки N . Значит, треугольник ANK равнобедренный и прямоугольный. Поэтому угол MAN равен 45° .

Ответ: А.

68. Разобьём все места в президиуме на восемь групп так, как показано на рисунке. Если лжецов меньше восьми, то в какой-то из этих групп сидят одни правдолюбыв, чего быть не может. На том же рисунке также показано, как можно рассадить восемь лжецов.

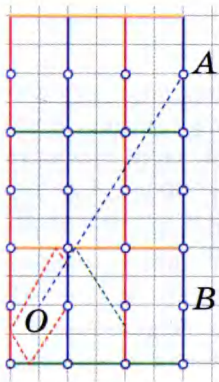
	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Ответ: В.

69. Рассмотрим множественные зеркальные образы бильярдного стола с центром O (симметричные отражения прямоугольника относительно сторон).

При этом образы разных сторон бильярдного стола будем отмечать определённым цветом (см. рисунок). Это легко нарисовать на клетчатой бумаге.

Поскольку отражение от борта равносильно движению по прямой по отражениям, движение шара на столе соответствует движению по лучу OA (синяя штриховая линия). Мы хотим, чтобы луч OA пересекал 4 разноцветных отрезка ровно по одному разу и прохо-



дил через образ лузы (один из кружков на рисунке). Лишь в этом случае соответствующая траектория шара (красная штриховая линия) будет удовлетворять условию. При этом отношение катетов в прямоугольном треугольнике OAB равно $OB/AB = 5/8$ (тангенс искомого угла), что чуть больше, чем $1/\sqrt{3}$ (тангенс угла в 30°). Значит, и сам угол должен быть чуть больше 30° . Более точные вычисления показывают, что угол примерно равен 32° .

Ответ: С.



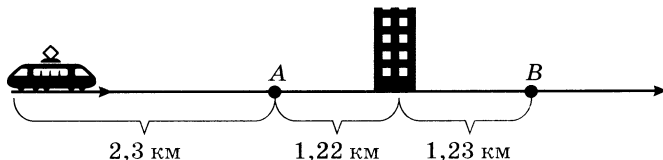
70. На первый взгляд ситуация кажется невозможной, однако это не так! Такое возможно, например, если трамвай сначала приезжает на ближайшую остановку A , куда побежал студент, а затем едет к остановке B , куда пошёл профессор. Тогда у профессора будет в запасе некоторое время, пока трамвай едет от A до B . Ясно, что если скорость трамвая не очень велика, то профессор может успеть на тот трамвай, на который не успел студент! Давайте подсчитаем.

Пусть v — скорость трамвая, S — расстояние между двумя ближайшими остановками, R — расстояние между этим трамваем и ближайшей остановкой в тот момент, когда студент и профессор одновременно выходят из дома. Студент не успевает на трамвай, что означает $R/v < (S/2)/12$

Профессор успевает на этот трамвай, что означает $(R + S)/v > (S/2)/6$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} Sv/12 - S < R < Sv/24 \Rightarrow \\ \Rightarrow v/12 - 1 < v/24 \Rightarrow \\ \Rightarrow v < 24 \text{ км/ч.} \end{aligned}$$

23 км/ч — наибольшее целое число, удовлетворяющее этому условию. Легко построить пример, в котором описанная ситуация возможна, если скорость трамвая равна 23 км/ч. Для этого остановка A должна быть лишь чуть ближе к дому, чем остановка B . Например так, как показано на рисунке:



Решения

Для тех, кто ещё не поверил:

Трамвай до остановки *A* едет $2,3 \text{ км}/23 \text{ км/ч} = 1/10 \text{ ч}$. Студент при этом бежит $1,22 \text{ км}/12 \text{ км/ч} > 1/10 \text{ ч}$ и не успевает.

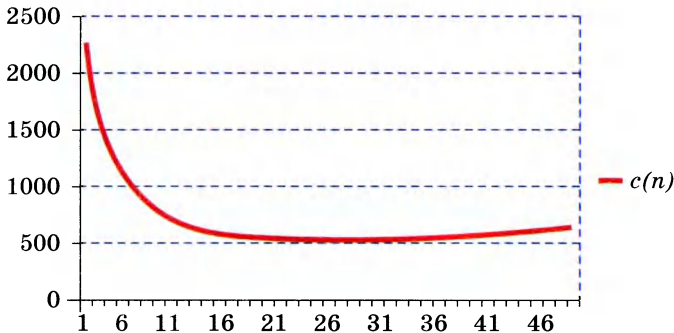
Трамвай до остановки *B* едет $4,75 \text{ км}/23 \text{ км/ч} = 4,75/23 \text{ ч}$. Профессор идёт к остановке *B* за $1,23/6 \text{ ч} < 4,75/23 \text{ ч}$ и успевает!

Ответ: В.

71. Предположим, что магазин закупает шкафы по цене p_0 и продаёт по цене p_1 тыс руб за штуку. По условию всего за год продаётся $130 \cdot 52$ шкафов. Пусть заказ на поставку совершается одинаковыми партиями n раз в течение года. Тогда прибыль (в тыс руб) составляет $130 \cdot 52 \cdot (p_1 - p_0) - (10 \cdot n + (130 \cdot 52)/n)$.

Чтобы получить наибольшую прибыль, нужно подобрать такое n , для которого издержки $c(n) = (10 \cdot n + (130 \cdot 52)/n)$ будут как можно меньше.

На рисунке изображён график функции $c(n)$.



Заметим, что для любых положительных чисел a и b выполнено неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Это следует из того, что $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, причём равенство достигается, только если $a = b$.

Поэтому в нашем случае $10 \cdot n + (130 \cdot 52)/n \geq 520$, причём равенство достигается для такого n , что $10n = (130 \cdot 52)/n$, то есть для $n = 26$.

Комментарий: задача управления запасами — это пример простой задачи оптимизации. В математике есть область, посвящённая оптимизационным

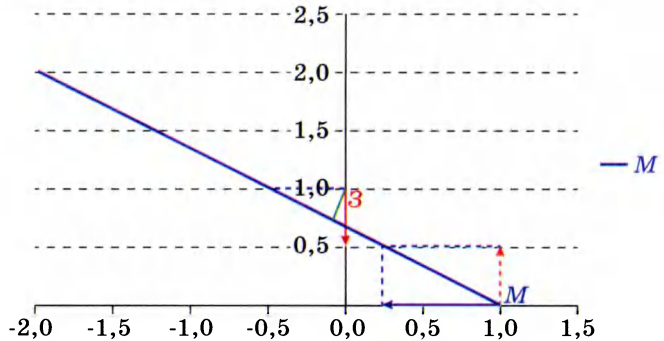


задачам и методам их решения. Она называется «оптимальное управление».

Ответ: С.



72. Обозначим «Запорожец» и «Мерседес» буквами $З$ и $М$ соответственно и посмотрим на их взаимное расположение. Пусть точка пересечения дорог соответствует началу координат. Выберем систему координат так, что $(1\text{ км}, 0)$ и $(0, 1\text{ км})$ — координаты $М$ и $З$ соответственно. Время t , за которое «Запорожец» смещается на некоторый красный вектор на рисунке ниже, соответствует времени, за которое «Мерседес» смещается на синий вектор вдоль дороги. При этом синий вектор в полтора раза длиннее красного вектора, так как скорость $М$ в полтора раза больше скорости $З$. В системе координат относительно $З$ (в которой точка $З$ неподвижна) точка $М$ движется по прямой, направление которой задаётся суммой синего вектора и вектора, который компенсирует смещение на красный вектор (штриховой красный на рисунке).



В результате получается, что наименьшее расстояние между $М$ и $З$ соответствует высоте прямоугольного треугольника со сторонами $1/3$ км и $1/2$ км (зелёный отрезок на рисунке). Эту высоту h легко найти, записав площадь треугольника двумя способами и воспользовавшись теоремой Пифагора:

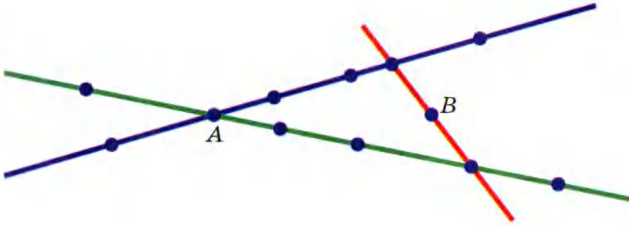
$$(1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/3) = (1/2) \cdot h \cdot \sqrt{(1/2)^2 + (1/3)^2}.$$

Отсюда $h = 1/\sqrt{13}$ км ≈ 277 м. Наиболее близкий из предложенных вариантов 275 м.

Ответ: В.

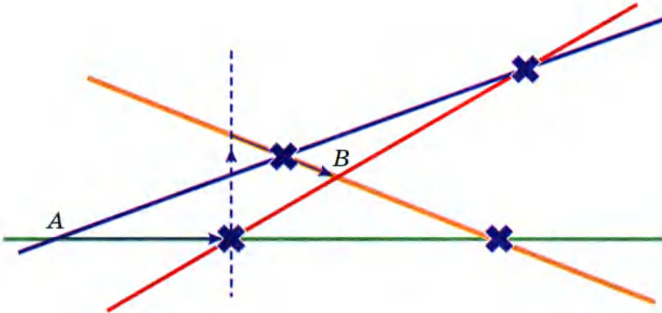


73. По условию каждая линия метро содержит ровно 39 станций (эти станции — переходы на другие линии). Выберем две любые линии метро. Пусть станция A — пересечение этих линий, а станция B не лежит на этих линиях.



Тогда ясно, что если закрыть все станции выбранных линий кроме A (по 38 станций на синей и зелёной ветках метро на рисунке), то нельзя будет доехать из A в B . Поэтому k не может быть больше 75.

Покажем теперь, что если закрыть не более 75 станций, то от любой работающей станции можно будет доехать до любой другой работающей. Предположим противное: есть две работающие станции A и B такие, что нельзя добраться из A в B . Рассмотрим две пары линий, которые пересекаются в точках A и B соответственно (см. рисунок).



Ясно, что остальные станции пересечения этих четырёх веток должны быть закрыты (они отмечены крестиком на рисунке), иначе можно было бы доехать из A в B всего с одной пересадкой. Рассмотрим любую из остальных 36 веток метро (штриховая линия).

По условию, она пересекает 4 выбранные линии в четырёх новых станциях. Хотя бы 2 из этих четырёх станций должны быть закрыты, так как иначе можно было бы проехать из A в B с двумя пересадками (пример для одного из случаев показан на рисунке стрелками, другие случаи аналогичны). В итоге закрытых станций должно быть по крайней мере $4 + 2 \cdot 36 = 76$. Противоречие.

Ответ: В.



74. Кажется, что прямые OB и AC параллельны. На самом деле, длина хорды BC чуть-чуть меньше длины радиуса OA . Поэтому данные прямые пересекаются в некоторой точке X на луче OB . Давайте посчитаем. Пусть M — середина хорды BC . Из прямоугольного треугольника OMB по теореме Пифагора

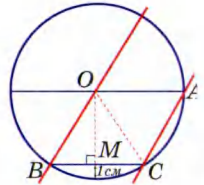
$BM = \sqrt{(15/2)^2 - (13/2)^2} = \sqrt{14}$,
поэтому $BC = 2 BM = 2\sqrt{14} \approx 7,48 < 7,5 = OA$.

Обозначим через x искомое расстояние OX . Треугольники OXA и BXC подобны, поэтому равны отношения их соответствующих сторон:

$$x/7,5 = (x - 7,5)/2\sqrt{14} \Rightarrow x = 7,5^2/(7,5 - 2\sqrt{14}) = 56,25 \cdot (7,5 + 2\sqrt{14})/0,25 \approx 225 \cdot 15 = 3375 \text{ см} = 33,75 \text{ м!}$$

Комментарий: заметим, что в вычислениях мы умножили числитель и знаменатель на сопряжённое выражение $7,5 + 2\sqrt{14}$ с целью уменьшить ошибку округления.

Ответ: D.



75. Интуитивно кажется, что такая вероятность должна быть мала, но здесь интуиция нас обманывает! Давайте подсчитаем. Пусть у нас есть случайная выборка школьников одного года рождения. Ей соответствует набор $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{30})$, где x_i — целое число от 1 до 365 (номер дня в году, когда родился i -й школьник; считаем, что год не является високосным)

По правилу комбинаторики число всех возможных наборов равно 365 в степени 30 ; а число наборов, в которых нет повторений, равно

$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - 29)$ (первый элемент можно выбрать 365 способами, второй — 364, третий — 363, ...).

Поэтому вероятность того, что в случайной выборке у каких-то двух школьников совпадут дни рождения равна

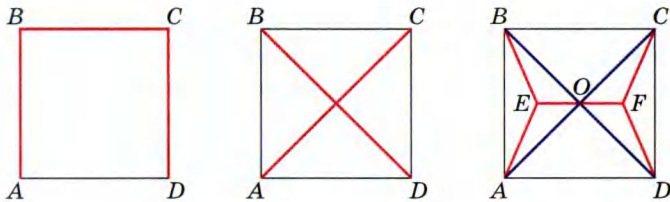
$$1 - (365/365) \cdot (364/365) \cdot \dots \cdot ((365 - 29)/365) = 0,706\dots$$

Это выражение можно очень быстро вычислить, например, в программе Excel.

Видим, что вероятность получилась достаточно большой!

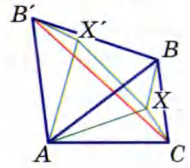
Ответ: С.

76. Пусть A , B , C и D — города, расположенные в вершинах квадрата $ABCD$ со стороной 100 км. Их можно соединить, например, буквой «П»: дорога идёт от A до B , затем от B до C , и затем от C до D . Общая длина такой системы 300 км. Её можно улучшить, соединив города по диагоналям квадрата (при этом образуется один перекрёсток). Общая длина такой системы равна $200\sqrt{2} \approx 283$ км. Интуитивно кажется, что такая система является оптимальной, но это не так!



Покажем, как её можно улучшить. Пусть O — центр квадрата. В треугольнике AOB возьмём точку E , из которой его стороны видны под углом 120° . В треугольнике COD возьмём точку F , из которой его стороны видны под углом 120° . Теперь соединим E с A , B и F , а F с C и D (см. рисунок). Легко подсчитать общую длину такой системы: $4 \cdot (100/\sqrt{3}) + (100 - 100/\sqrt{3}) = 100 \cdot (\sqrt{3} + 1) = 273,2$ км, то есть экономим почти 10 млн динаров!

Примечание: здесь мы не приводим строгого доказательства оптимальности такой системы. Оно основано на замечательной задаче о точке Торричелли: внутри остроугольного треугольника ABC найдите точку X , для которой сумма расстояний до вершин треугольника будет минимальной. Ответом будет точка X , из которой стороны треугольника видны под углом 120° . Красивое доказательство этого факта можно получить с помощью рисунка.

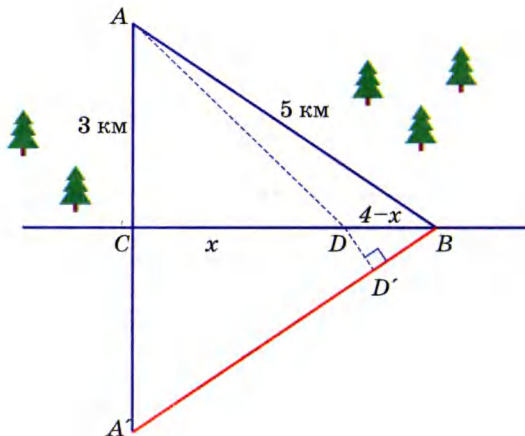


Пусть B' и X' — образы точек B и X соответственно при повороте на 60° вокруг точки A . Тогда $AX + BX + CX = CX + XX' + X'B' \geq CB'$ (ломаная длиннее отрезка, соединяющего ее концы), причём равенство достигается лишь в случае, когда X и X' лежат на прямой CB' , но тогда углы AXB , BXC и CXA равны 120° .

Ответ: В.



77. Предположим, что по другую сторону от дороги также находится лес. Рассмотрим точку A' , симметричную точке A относительно прямой BC . Заметим, что дойти от точки D до B по дороге со скоростью 5 км/ч можно за то же время, что от точки D до прямой $A'B$ по лесу со скоростью 3 км/ч (для прямоугольного треугольника $D'DB$ выполнено $D'D/DB = 3/5$).



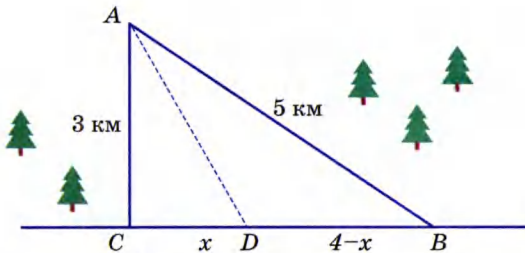
Но кратчайший путь из A до прямой $A'B$ — высота треугольника $A'AB$. В частности, A , D и D' лежат на одной прямой. Пусть h — длина этой высоты. Запишем площадь треугольника $A'AB$ двумя способами: $(1/2) \cdot h \cdot 5 = (1/2) \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow h = 24/5$ км.

При этом наименьшее время будет равно

$$(24/5) \text{ км} / 3 \text{ км/ч} = 8/5 \text{ ч} = 1 \text{ ч } 36 \text{ мин}$$

Второе решение для тех, кто знаком с понятием «производная функции»:

Пусть A — точка, в которой находятся туристы, B — населённый пункт, C — ближайшая точка дороги, D — произвольная точка на участке CB (см. рисунок).



Обозначим расстояние CD через x . Тогда время, которое затратят туристы, двигаясь по лесу до точки D и затем вдоль дороги до точки B , равно $t(x) = \sqrt{9 + x^2}/3 + (4 - x)/5$. Нужно найти минимум этой функции по x , при $0 \leq x \leq 4$. Минимум достигается в точке x^* , где производная обращается в ноль: $t'(x) = (1/3) \cdot 2x/2\sqrt{9 + x^2} - 1/5 = 0 \Rightarrow x^* = 9/4$.

При этом наименьшее время равно $t(9/4) = 1 \text{ ч } 36 \text{ мин}$ (Способ по лесу от A до B даёт $1 \text{ ч } 40 \text{ мин}$. Способ от A до C по лесу, а дальше до B по дороге даёт $1 \text{ ч } 48 \text{ мин}$.)

Ответ: С.

78. У одноклассников Димы может быть от 0 до 20 друзей — всего 21 вариант. Но если кто-то дружит со всеми, то у всех не меньше одного друга. Поэтому есть либо тот, кто дружит со всеми, либо тот, кто не дружит ни с кем. В обоих случаях остаётся 20 вариантов для числа друзей: 1, 2, ..., 20 (первый случай) или 0, 1, ..., 19 (второй случай).



Среди одноклассников Димы выберем того, у кого больше всего друзей (обозначим его буквой A), и того, у кого меньше всего друзей (обозначим его буквой B). Ясно, что в каждом из двух случаев Дима дружит с A и не дружит с B .

Теперь переведём A и B в другой класс. Так как A дружит со всеми из оставшихся, а B — ни с кем из оставшихся, то после перевода у каждого станет ровно на одного друга в классе меньше. Поэтому у оставшихся одноклассников Димы снова будет раз-
личное число друзей в классе.

Теперь снова переведём самого «дружелюбного» и самого «нелюдимого» в другой класс, и т. д. Повторяя эту процедуру 10 раз, мы переведём в другой класс 10 пар школьников (всех кроме Димы). При этом в каждой паре будет ровно один Димин друг. Значит, всего у Димы 10 друзей.

Ответ: В.



79. Сотрудники каждый раз вычисляли целую часть суммы каких-то двух чисел, которая равна сумме их целых частей плюс, возможно, единица. Назовём это добавление единицы *довеском*. Довесок мог образоваться лишь тогда, когда оба слагаемых были нецелыми. Каждый сотрудник получил в итоге сумму целых частей исходных чисел плюс количество довесков, которые образовались у него в процессе подсчёта. Поскольку каждый довесок соответствовал удалению двух нецелых чисел, довесков было максимум 20, а возможных различных результатов не более 21.

Покажем, что мог получиться ровно 21 различных результат. Например, пусть всего было 20 расходов по 100,3 руб и 20 расходов по 100,7 руб. Тогда сначала k раз складываем 100,3 и 100,7, в процессе чего образуется ровно k довесков (при $k = 0$ складываем 100,3 и 100,3). Далее к имеющемуся уже целому числу добавляем по очереди все остальные числа без довесков.

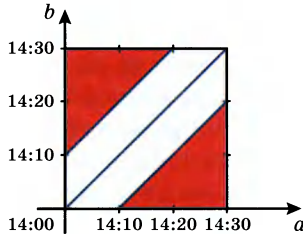
Ответ: В.



80. Удобно изобразить условие графически на координатной плоскости (a, b) , где a и b — точное время, когда пришли Алекс и Бен соответственно.

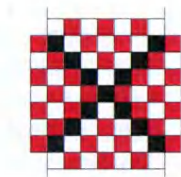
Решения

Алекс и Бен встретятся, только если точка с координатами (a, b) не попадёт ни в один из красных треугольников на рисунке. Если принять сторону квадрата за 1, то это два равнобедренных прямоугольных треугольника со стороной $2/3$. Вероятность встречи соответствует отношению площади белой части квадрата к площади всего квадрата, то есть равна $1 - (2/3)^2 = 5/9$.



Ответ: D.

81. Заметим, что три квадрата при вершине куба образуют цикл соседних квадратов длины 3. Вокруг него образуется ещё один цикл длины $3 \cdot 3 = 9$ из соседних клеток; вокруг него — цикл длины $3 \cdot 5 = 15$. А вокруг него — цикл длины $3 \cdot 7 = 21$. Взяв вокруг двух противоположных вершин куба по четыре таких цикла, а вокруг остальных шести вершин куба — по три малых цикла, получим $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 26$ непересекающихся нечётных циклов. Поскольку нечётный цикл в два цвета правильно покрасить нельзя, каждый из них должен содержать хотя бы одну чёрную клетку. Значит, всего чёрных квадратов должно быть по крайней мере 26. Построим теперь пример, когда чёрных квадратов будет ровно 26. Для этого покрасим четыре боковые грани в красный и белый цвета в шахматном порядке, а верхнюю и нижнюю грани покрасим, как показано на рисунке.



Ответ: B.



82. Пусть 12 стульев стоят в ряд. Рассмотрим возможные распределения золота (З) и бриллиантов (Б). Например, на рисунке показан случай, когда золото находится в стуле №7, а бриллианты в стуле №2.

	Б					З					
--	---	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--

Всего существует $12 \cdot 12 = 144$ различных вариантов распределения золота и бриллиантов по стульям. Нас интересуют только те из них, когда номер стула, в котором лежит золото, строго больше номера стула, где лежат бриллианты (лишь в этом случае Остап найдёт бриллианты, но не найдёт золота). Если золото лежит в стуле №1, то таких вариантов нет. Если золото лежит в стуле №2, то такой вариант ровно один. Если золото лежит в стуле №3, то таких вариантов ровно два, и т. д.

Итак, всего имеется $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 11 \cdot 12 / 2 = 66$ интересующих нас вариантов распределения золота и бриллиантов по стульям.

Поэтому вероятность того, что Остап найдёт бриллианты, но не найдёт золота, равна $66/144 = 11/24$.

Ответ: С.

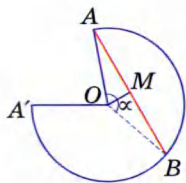


83. Решим сначала следующую задачу: какой наибольшей высоты может быть здание, чтобы для него за k бросаний можно было выяснить то, что спрашивается в исходной задаче. Наибольший этаж, который соответствует первой попытке, равен k . Ведь если кокос разобьётся, у нас останется всего один кокос и $k - 1$ попыток. В этих условиях мы вынуждены проверять последовательно все этажи, начиная с первого. Если же кокос не разбился, то бросаем его с этажа $k + (k - 1)$. По аналогии с предыдущим проверяется, что это наибольший возможный этаж: ведь если теперь первый кокос разобьётся, у нас останется всего $k - 2$ попыток, и мы будем вынуждены проверять этажи последовательно по возрастанию, начиная с $(k + 1)$ -го этажа. Если же первый кокос не разбился при бросании с этажа $k + (k - 1)$, то бросаем его с этажа $k + (k - 1) + (k - 2)$, и т. д. Поэтому наибольшая высота здания

для нашего «эксперимента» с k попытками равна $k + (k - 1) + \dots + 1 = k \cdot (k + 1)/2$. Для решения исходной задачи достаточно найти наименьшее натуральное число k , для которого $k \cdot (k + 1)/2 \geq 100$. Отсюда получаем, что выяснить наименьший этаж, упав с которого кокос разбивается, можно минимум за 14 попыток.

Ответ: С.

84. Наверняка вы видели, как делают из листа бумаги стакан в форме конуса. Наоборот, бумажный конус с вершиной O можно разрезать вдоль отрезка OA и развернуть на плоскости. При этом получится сектор круга (см. рисунок). Отрезки OA и OA' нужно склеить, чтобы получить снова конус.



При этом любому пути по поверхности конуса будет соответствовать некий путь, соединяющий точки A и B полученного сектора. Но кратчайший путь на плоскости — это отрезок, соединяющий A и B . Найдём длину этого отрезка (красный отрезок на рисунке).

Если высота конуса равна 2, то $OA = 2\sqrt{2}$. Длина дуги AB равна половине длины окружности радиуса 2 (основание конуса), то есть 2π . Поэтому угол α на рисунке равен $(2\pi/(2\sqrt{2}\pi)) \cdot \pi = \pi/\sqrt{2}$ радиан. Пусть M — середина отрезка AB . Тогда $AB = 2BM = 2OB \cdot \sin(\alpha/2) = 4\sqrt{2} \cdot \sin(\pi/2\sqrt{2}) \approx 5$ км.

Ответ: В.

85. Изобразим блуждания нашего Джо (рис. 1).

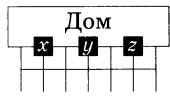


Рис. 1

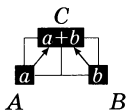


Рис. 2

Для этого разделим дорогу на квадраты размера $0,5 \text{ м} \times 0,5 \text{ м}$ и в каждой точке, где может оказаться Джо, поставим число различных способов (путей) оказаться в этой точке. При этом если в узлы A и B Джо может попасть a и b способами, то в узел C (рис. 2) он может попасть $a + b$ способами.

Поэтому вырисовывается такая картинка (рис. 3). Здесь красные крестики соответствуют положениям, из которых Джо падает в канаву.



Легко понять (и доказать по индукции), что если до дома n метров ($2n$ шагов), то количество различных путей до дома (способов оказаться в точках x , y или z) равно $4 \cdot 3^{n-1}$.

С другой стороны, если предположить, что канава отсутствует, существует всего 2^{2n} различных путей, так как с каждым шагом Джо отклоняется либо вправо, либо влево (2 варианта) и всего Джо делает $2n$ шагов. Поэтому вероятность того, что Джо дойдёт в нашем случае ($n = 20$) равна

$$4 \cdot 3^{19} / 2^{40} = (3/4)^{19} \approx 0,0042, \text{ или примерно } 0,4\%.$$

Ответ: В.

86. Пусть команда «Амкар» заняла k -е место, набрав m очков. Тогда $m \leq 3(k-1)$, так как по условию «Амкар» мог набрать очки лишь в матче с командами, занявшими места с 1 по $k-1$.

Оценим общее число очков S , набранное командами, которые заняли места с $(k+1)$ -го по 16-е.

С одной стороны,

$$S \leq (m-1) + (m-2) + \dots + (m-(16-k)) = m \cdot (16-k) - (1/2) \cdot (16-k) \cdot (17-k).$$

С другой стороны,

$$S \geq 3(16-k) + (16-k) \cdot (15-k),$$

так как все эти команды выиграли у «Амкара» и в каждом матче друг с другом (а таких матчей ровно $1/2 \cdot (16-k) \cdot (15-k)$) набрали в сумме не менее двух очков. Итак,

$$3(16-k) + (16-k) \cdot (15-k) \leq S \leq m \cdot (16-k) - (1/2) \cdot (16-k) \cdot (17-k).$$

Отсюда $3 + (15-k) \leq m - (1/2) \cdot (17-k)$, то есть $m \geq (1/2) \cdot (53-3k)$

Итак, мы получаем $(1/2) \cdot (53-3k) \leq m \leq 3(k-1)$, то есть $9k \geq 59$ (и k — целое число) $\Rightarrow k \geq 7$.

Таким образом, «Амкар» не мог занять место выше 7-го. Пример, показывающий, что «Амкар» мог занять седьмое место, приведён в таблице (один из возможных турниров, в котором «Амкар» занимает 7-е место).

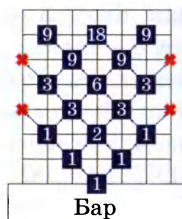


Рис. 3



Решения

Место. Очки

1	42	·	3	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	39	0	·	3	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	36	0	0	·	3	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	33	0	0	0	·	3	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	30	0	0	0	0	·	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	23	0	0	0	0	0	·	0	3	1	3	1	3	3	3	3	3
7 «Амкар»	18		3	3	3	3	3	3	·	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	17	0	0	0	0	0	0	3	·	1	1	1	1	1	3	3	3
9	16	0	0	0	0	0	1	3	1	·	1	1	1	1	1	3	3
10	15	0	0	0	0	0	0	3	1	1	·	1	1	1	1	3	3
11	14	0	0	0	0	0	1	3	1	1	1	·	1	1	1	1	3
12	13	0	0	0	0	0	0	3	1	1	1	1	·	1	1	1	3
13	11	0	0	0	0	0	0	3	1	1	1	1	1	·	1	1	1
14	10	0	0	0	0	0	0	3	0	1	1	1	1	1	·	1	1
15	8	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	1	1	1	·	1
16	6	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	1	1	·

Ответ: С.

87. Пассажиры, которые сели не на своё место, если таковые есть, образуют цикл, который начинается и заканчивается старушкой: каждый сидит на месте следующего пассажира, а последний из севших не на своё место — на месте старушки. Таким образом, последний пассажир из всех мог сесть либо на своё место, либо на место старушки. Заметим, что эти два места равноправны: ни он, ни старушка не смотрят на билет при посадке, и если они предварительно обменяются билетами, то ничего не изменится. Значит, последний пассажир сядет на одно из этих двух мест с равной вероятностью, и эта вероятность равна $1/2$.

Ответ: А.

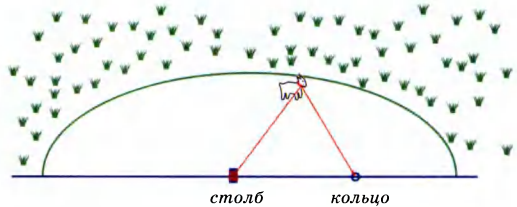
88. Ситуацию с n пиратами можно анализировать на основе ситуации с $n - 1$ пиратами. Предположим, что пиратов только двое. Тогда достаточно одного голоса старшего пирата, чтобы предложение было принято, и он заберёт все 100 монет. Пусть теперь пиратов трое. Пронумеруем пиратов по старшинству: 1 — самый старший, 2 — средний, 3 — младший. Первому пирату нужно заручиться поддержкой 3-го. Для этого достаточно дать третьему одну монету. Общее распределение монет таково: (99, 0, 1). Третий вынужден будет проголосовать за такое распределение, так как в противном случае делить будет второй пират,



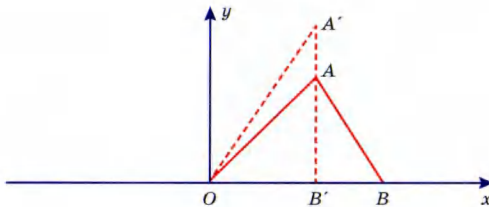
который всё заберёт себе, и третий это понимает. Теперь рассмотрим ситуацию с четырьмя пиратами. Первому нужно заручиться поддержкой третьего. Для этого достаточно дать ему одну монету. Третий вынужден поддержать, так как в противном случае он не получит ничего (см. случай трёх пиратов). Общее распределение монет (99, 0, 1, 0). Теперь принцип ясен. В каждом случае самый старший пират должен «купить» ровно столько голосов, сколько ему необходимо, и как можно дешевле. А именно, купить за одну монету тех пиратов, которые при следующем распределении не получили бы ничего, и все остальные деньги достанутся ему самому. В случае с десятью пиратами это приводит к распределению (96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), то есть 96 монет заберёт себе старший пират.

Ответ: С.

89. Введём систему координат так, как показано на нижнем рисунке.



Посмотрим, каково наибольшее возможное значение y при заданном значении x . Это значение достигается, когда натянутая верёвка от козы до кольца (от точки A до точки B на рисунке ниже) перпендикулярна оси x . В самом деле, если бы это было не так, то значение y можно было бы увеличить, рассмотрев достижимую точку A' (при этом длина верёвки $OA'B'$ остаётся равной 10 м).

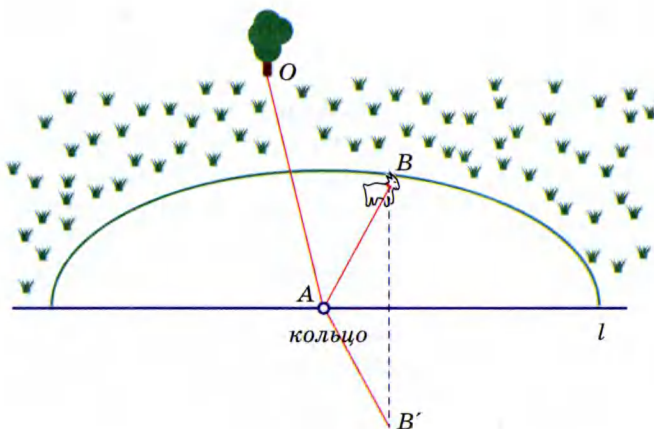


Решения

Пусть $OB' = x$, $A'B' = y$. Тогда по условию $OA' = 10 - y$. Из прямоугольного треугольника $OA'B'$ по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = (10 - y)^2 \Rightarrow y = 5 - x^2/20$, а это уравнение параболы!

Ответ: В.

90. Предположим, что забора нет, а есть лишь натянутая проволока (прямая l на рисунке), и коза может свободно проходить под проволокой. Тогда для любого достижимого положения козы над прямой l (точка B) есть соответствующее достижимое положение, симметричное относительно прямой l (точка B'). Но по неравенству треугольника $OB' \leq OA + AB' = 20$ м, причём равенство достигается, если точка A лежит на прямой OB' . Значит, область, доступная для козы, когда она находится под прямой l , ограничена дугой окружности радиуса 20 м с центром в точке O . Поэтому симметричная область (над прямой l на рисунке) также ограничена дугой некоторой окружности.



Ответ: А.

91. Обозначим команды точками на плоскости. Соединим между собой две точки отрезком, если соответствующие команды сыграли между собой. Получаем так называемый *граф*. Точки — *вершины* этого графа, а отрезки — *рёбра* графа. Сначала ответим на следующий вопрос: какое наибольшее число рёбер может

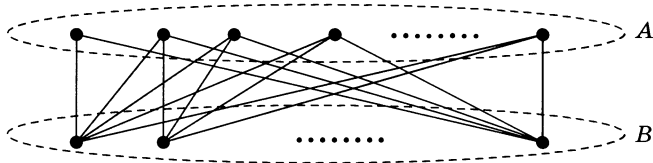


быть в графе, у которого n вершин и нет трёх вершин, попарно соединённых рёбрами («граф без треугольников»)? Ответ на этот вопрос даёт теорема Турана.

Теорема Турана

В графе с n вершинами, не содержащем треугольников, не более $n^2/4$ рёбер, причём равенство достигается для двудольного графа, когда n чётно.

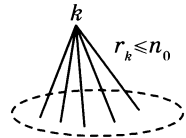
Комментарий: двудольный граф получается так: все вершины разбиваются на два множества A и B , после чего любые две вершины из разных множеств и только они соединяются ребром (см. рисунок). Ясно, что если n чётное и в каждом из множеств A и B по $n/2$ вершин, то в построенном графе будет ровно $(n/2) \cdot (n/2) = n^2/4$ рёбер и не будет треугольников.



Доказательство.

Пронумеруем вершины графа с n вершинами числа от 1 до n . Пусть r_k — число рёбер, выходящих из вершины k , а R — общее число рёбер в графе.

Пусть V_0 — наибольшее «независимое» множество вершин (никакие две вершины из V_0 не соединены ребром), а V_1 — множество остальных вершин. Количество вершин в этих множествах обозначим n_0 и n_1 соответственно. При этом $n_0 + n_1 = n$. Заметим, что для любого k выполнено неравенство $r_k \leq n_0$, так как в противном случае концы рёбер, выходящих из вершины k , образовали бы большее независимое множество (никакие две вершины этого множества не будут соединены ребром, так как в исходном графе нет треугольников).



Заметим также, что для любого ребра нашего графа хотя бы один из его концов принадлежит V_1 (ведь никакие две вершины из V_0 не соединены ребром). Поэтому

всего рёбер в графе $R \leq (\text{сумма } r_k \text{ по всем } k \text{ из } V_1) \leq (\text{сумма } n_0 \text{ по всем } k \text{ из } V_1) = n_0 \cdot n_1 \leq (n_0 + n_1)^2/4 = n^2/4$, и теорема доказана.

Вернёмся теперь к исходной задаче. Легко построить пример, в котором каждая команда сыграла по крайней мере 10 матчей, но нет четырёх команд, попарно сыгравших между собой. Примером служит так называемый *трёхдольный граф*. Для этого разделим множество из 16 вершин графа (команд) на 3 примерно равные группы (5, 5 и 6 команд) и соединим рёбрами вершины из разных групп и только их. В таком графе из каждой вершины выходит 10 или 11 рёбер и нет четырёх вершин, попарно соединённых рёбрами (иначе 2 вершины из этих четырёх должны оказаться в одной группе, но тогда мы получаем противоречие, так как любые две вершины из одной группы не соединены ребром по построению).

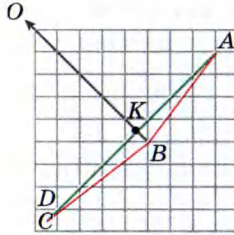
Докажем теперь, что если из каждой вершины выходит 11 или более рёбер, то найдутся четыре вершины, попарно соединённые рёбрами. Рассмотрим какую-нибудь вершину A нашего графа. Концы 11 рёбер, которые выходят из этой вершины, служат вершинами подграфа (две вершины этого подграфа соединены ребром тогда и только тогда, когда они соединены ребром в исходном графе). Из условия задачи получаем, что из каждой вершины подграфа выходит по крайней мере $11 - 5 = 6$ рёбер, то есть всего рёбер в подграфе не менее $6 \cdot 11/2 = 33$. Поэтому по теореме Турана в таком графе обязательно есть треугольник (три вершины B , C и D , попарно соединённые рёбрами), ведь если бы таких трёх вершин не было, то в подграфе было бы не более $11^2/4 < 33$ рёбер. Итак, мы нашли четыре вершины A , B , C и D в исходном графе, которые попарно соединены рёбрами. Поэтому k не может быть больше 10.

Ответ: С.

92. Нарисуем условие на клетчатой бумаге, считая, что сторона клетки равна 1 км. Пусть хижина Робинзона находится в точке A . Пусть B и C — точки на берегу моря, в которых оказался Робинзон. Заметим, что C не лежит в узле клетчатой бумаги, так как 10 чуть



больше, чем $7\sqrt{2}$. Получился «узенький» треугольник ABC . Радиус острова — это радиус окружности, описанной около треугольника ABC .



Давайте попробуем оценить, чему равен этот радиус. Для этого рассмотрим узел D , ближайший к точке C . Пусть K — середина AD . Видно, что $BA = BD = 5$ как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, поэтому центр описанной окружности O треугольника ABD лежит на прямой BK . Пусть $OB = r$. Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OKD получаем

$$r^2 = (r - \sqrt{2}/2)^2 + (7\sqrt{2}/2)^2 \Rightarrow \sqrt{2} r = 1/2 + 49 \cdot 1/2 \Rightarrow r = 25\sqrt{2}/2 \approx 17,68 \text{ км.}$$

Радиус же окружности R , описанной около треугольника ABC , будет чуть больше. Поэтому Робинзону нужно будет преодолеть расстояние, которое несколько больше, чем длина окружности радиуса 17,68 км, то есть $2\pi \cdot 17,68 \approx 111$ км, что очень близко к ответу D .

Комментарий: получить более точный ответ можно, используя формулу $2R = a/\sin\alpha$ и формулу для синуса разности двух углов.

Ответ: D.



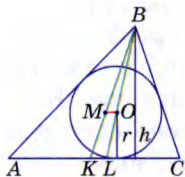
93. Если математик 50 раз запросит по 26 тысяч, то ровно в 25 случаях банкомат выдаст деньги. При этом математик всего снимет $26 \cdot 25 = 650$ тысяч рублей. Докажем, что математик не может гарантировать себе большую сумму. Предположим, что против математика играет банкир, который знает номиналы карточек. На каждом шаге математик называет сумму, которую он хочет ввести, а банкир выбирает одну из карточек и вставляет в банкомат. Наш виртуальный банкир — это «обстоятельства», которые могут сложиться не

в пользу математика. Достаточно указать стратегию для банкира, при которой математик не может получить больше 650 тысяч рублей.

Пусть, например, банкир действует так: когда математик называет сумму на очередном шаге, банкир вставляет произвольную карточку с номиналом, меньшим названной суммы, если таковая имеется (денег математик не получает), и карточку с максимальным номиналом из имеющихся на руках — в противном случае (математик получает заявленную сумму; назовём такую карточку *реализованной*). Заметим, что карточки реализуются в порядке убывания номиналов. Предположим, что наибольший платёж в итоге составил n рублей. Это могло случиться только при реализации карточки номиналом $m \geq n$ рублей. К моменту этого платежа все карточки с номиналом, меньшим n рублей, уже съедены (иначе банкир вставил бы одну из таких карточек в банкомат вместо карты с номиналом m рублей). Более того, по карточкам с номиналами $1, 2, \dots, n-1$ математик не получил никаких денег, так как карточка с номиналом $k < n$ не могла быть реализована раньше карточки с номиналом $m \geq n$ рублей (карточки реализуются в порядке убывания номиналов). Таким образом, общее число реализованных карточек (по которым были получены деньги) не превосходит $50 - (n - 1)$, и с каждой реализованной карточки математик получит не более n тыс руб. В итоге всего математик получит не более $n \cdot (50 - n + 1)$ тыс руб. Наибольшее значение этого выражения достигается при $n = 25$ и $n = 26$ и составляет $25 \cdot 26 = 650$ тыс руб.

Ответ: В.

94. Рассмотрим какой-либо треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию и равны $a - d, a, a + d$. Пусть M — точка пересечения медиан, O — центр вписанной окружности этого треугольника (см. рисунок). Проведём к средней стороне $AC = a$ медиану BK и биссектрису BL (зелёные отрезки на рисунке). Подсчи-



таем площадь треугольника ABC двумя способами:
 $S = (1/2) \cdot h \cdot a = (1/2) \cdot r \cdot ((a - d) + a + (a + d))$.
 Отсюда $r = h/3$. Кроме того, поскольку M — точка пересечения медиан, $KM:KB = 1:3$.

Значит, OM (красный отрезок на рисунке) параллелен AC и $OM = (2/3) \cdot KL$.

Пусть $AL = x$. Так как BL — биссектриса, $AL:LC = AB:BC = (a + d)/(a - d)$. Отсюда

$$x \cdot (a - d) = (a - x) \cdot (a + d) \Rightarrow x = (a + d)/2 \Rightarrow \\ \Rightarrow KL = AL - AK = d/2 \Rightarrow OM = (2/3) \cdot KL = d/3.$$

В нашем случае $d = 1$, то есть искомое расстояние равно $1/3$.

Комментарий: если предположить, что искомое расстояние зависит только от d (и не зависит от a), то можно было быстро получить правильный ответ, нарисовав прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 на клетчатой бумаге. Проверьте!

Ответ: А.

95. Пусть $(M_1, D_1), (M_2, D_2), \dots, (M_{16}, D_{16})$ — единственное разбиение на пары из условия задачи (буквами M_k обозначены мальчики, буквами D_k — девочки). Предположим, что каждый мальчик позвонил хотя бы двум девочкам. Нарисуем стрелки от каждой девочки D_k к мальчику M_k , с которым она находится в паре (синие стрелки на рисунке), а также от каждого мальчика M_k к ещё одной (отличной от D_k) девочке, которой звонил этот мальчик (красные стрелки на рисунке).



Тогда от каждого ребёнка идёт по стрелке. Если мы будем двигаться по стрелкам (начав от произвольной девочки), то рано или поздно мы попадём к девочке, которая уже встречалась в строящейся цепочке. Если мы теперь в построенном цикле заменим исходные пары парами, которые соответствуют красным стрел-



кам, то получим другое разбиение на пары, что противоречит условию.

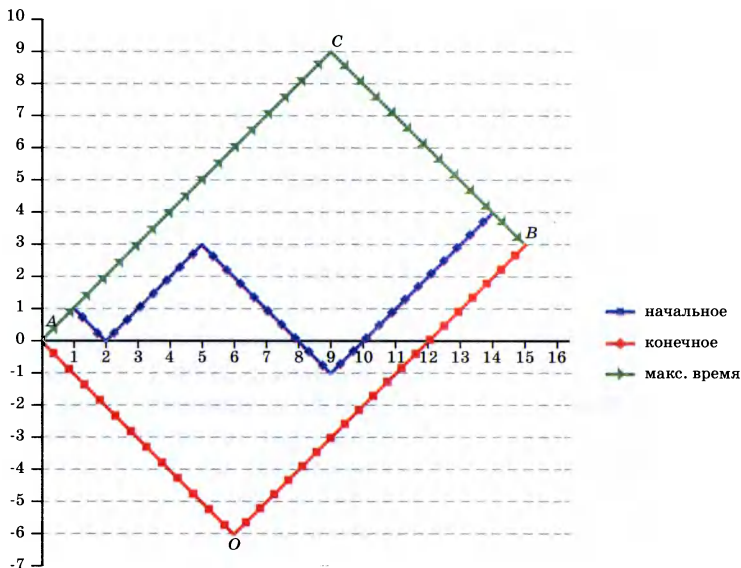
Поэтому найдётся мальчик, который звонил ровно одной девочке. Если отбросить эту пару, число звонков уменьшится не больше чем на 16 — максимальное возможное количество звонков этой девочке. После этого снова найдётся мальчик, сделавший ровно один звонок одной из оставшихся девочек. Отбросив эту пару, уменьшим количество звонков не более чем на 15, и т. д. Итого, было сделано не более чем

$$16 + 15 + \dots + 2 + 1 = 16 \cdot 17/2 = 136 \text{ звонков.}$$

Ровно 136 звонков могло получиться, если каждой девочке D_k позвонили мальчики M_1, M_2, \dots, M_k .

Ответ: Е.

96. Докажем, что при n новобранцах пройдёт не более $n - 1$ секунд. Эта задача имеет неожиданное геометрическое решение. Поставим в соответствие шеренге солдат ломаную AB , линии которой идут под углом 45° к горизонтальной прямой (синяя ломаная на рисунке для примера с $n = 15$): каждому солдату соответствует очередной отрезок ломаной, причём если солдат смотрит налево, то соответствующий отрезок ломаной



идёт вверх, а если направо — то вниз. Изменения, происходящие в шеренге новобранцев за очередную секунду, можно описать теперь так: концы A и B ломаной не сдвигаются, а каждый уголок из двух соседних отрезков, торчащий вверх («горка»; два новобранца смотрят друг на друга), превращается в уголок, торчащий вниз («ямка»). Таким образом, высота самой высокой «горки» за каждую секунду снижается, и так будет до тех пор, пока в ломаной не закончатся «горки», то есть она не превратится в ломаную AOB из двух сторон прямоугольника $AOBC$.

Наибольшее число секунд, в течение которого может происходить движение в шеренге из n солдат, равно $n - 1$: именно таким оно будет, если начальное расположение соответствует ломаной ACB , а для любой другой ломаной с теми же конечными вершинами время до полной остановки будет меньше.

Комментарий 1: мы предлагаем визуализировать процесс на компьютере. Также с помощью компьютера можно подсчитать «среднее» время, которое продолжается этот процесс. Считайте, что изначально каждый с одинаковой вероятностью $1/2$ поворачивается направо или налево. Это начальное расположение можно создать на компьютере с помощью генератора случайных чисел. Затем для каждого из n случайных начальных расположений (n достаточно велико, скажем $n = 1000$) считаем время t , которое будет продолжаться процесс, и усредняем по различным начальным расположениям. Тогда $T_{\text{среднее}} = (t_1 + t_2 + \dots + t_n)/n$. Такой метод в математике называют *методом Монте-Карло*. Он используется во многих прикладных задачах.

Комментарий 2: можно доказать, что процесс займёт конечное время, следующим образом. Обозначим тех, кто повернулся налево, цифрой 1, а направо — цифрой 0. Тогда мы получим последовательность из ста единиц и нулей, которая образует большое 100-значное число N (некоторые цифры в первых разрядах могут быть нулями). Таким образом, каждому расположению новобранцев мы ставим в соответствие 100-значный набор 0 и 1, как бы «кодируя»

Решения

исходное расположение новобранцев. И наоборот, по каждому такому набору легко восстановить, как стоят новобранцы. Заметим, что если после очередной секунды какие-то 1 и 0 в числе N стоят рядом и именно в таком порядке, то соответствующие им новобранцы смотрят друг на друга и по условию через секунду каждый из них развернется. Это означает, что 1 и 0 в наборе поменяются местами и число N уменьшится! Но натуральное число N не может уменьшаться бесконечно долго. Поэтому процесс заведомо закончится за некоторое время. На самом деле происходит своеобразная сортировка правильно и неправильно стоящих новобранцев. Каждый ноль в числе N через какое-то время будет стоять левее каждой единицы. Пример, когда все кроме одного, стоящего с краю, повернулись правильно, соответствует числу $N = 11111\dots 1110$ и даёт ровно 99 секунд.

Ответ: А.

97. Интуитивно кажется, что шансы одинаковы, но это ошибка! Давайте подумаем, имеет ли смысл ставить на последнюю карту ($k = 52$). Нет, так как у нас два красных туза и один из них всегда появится раньше, после чего игра будет окончена. Итак, если вы поставили на последнюю карту, то шансов выиграть у вас вообще нет. Значит, шансы при разных k всё-таки отличаются.

Всего существует $52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ разных способов расположить карты в колоде (это огромное число называется $52!$ (52 факториал)). Давайте теперь подсчитаем, сколько всего существует различных перестановок карт, когда первый красный туз стоит на k -м месте ($k < 52$). Второй красный туз может занять одно из $52 - k$ мест, а остальные карты можно переставить $50!$ способами. При этом бубновый туз на месте k , а червовый на месте $m > k$ и наоборот — это две разные перестановки. Отсюда и появляется множитель 2 в выражении ниже.

Поэтому вероятность того, что первый красный туз появится именно на k -м месте, равна

$$P_k = 2 \cdot (52 - k) \cdot 50! / 52! = 2 \cdot (52 - k) / (51 \cdot 52).$$



Ясно, что наибольшей эта вероятность будет при $k = 1$ и она равна $P_1 = 2 \cdot 51 / (51 \cdot 52) = 1/26$.

Итак, в данной игре ставить нужно на первую карту!

Ответ: А.



98. В этой задаче используются так называемые *числа Фибоначчи* — последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в которой каждое число равно сумме двух предыдущих, или, на языке математики, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 3$.

Заметим, что число 55, которое встречается в нашей задаче, является десятым членом последовательности Фибоначчи.

Докажем теперь методом математической индукции такое утверждение: среди не менее чем a_n чисел ($n \geq 3$) загаданное число нельзя заведомо угадать, заплатив менее чем $n - 1$ рублей. Для $n = 3$ (всего есть 2 числа) и $n = 4$ (всего есть 3 числа) утверждение легко проверяется. Пусть теперь имеется не менее a_n чисел. Тогда либо множество M чисел, выделенных в первом вопросе, содержит не менее a_{n-2} чисел (первый случай), либо множество чисел, не попавших в M , содержит не менее a_{n-1} чисел (второй случай).

В первом случае, если загаданное число попало в M , за ответ нужно заплатить 2 рубля и, по предположению индукции, ещё не менее $n - 2 - 1$ рублей для того, чтобы угадать число, то есть всего не менее чем $n - 1$ рублей.

Во втором случае, если загаданное число не попало в M , нужно заплатить 1 рубль за ответ и по предположению индукции не менее чем $n - 1 - 1$ рублей за угадывание числа, то есть вновь всего не менее чем $n - 1$ рублей.

Способ отгадать загаданное число из a_n возможных (где a_n — n -й член последовательности Фибоначчи), имея ровно $n - 1$ рублей, ясен из предыдущих рассуждений: на первом шаге делим множество чисел на два множества из a_{n-1} и a_{n-2} элементов и задаём вопрос о принадлежности загаданного числа множеству из a_{n-2} элементов. Затем, в зависимости от ответа, повторяем подобную процедуру для множества из a_{n-2} или a_{n-1} элементов.

Так как 55 является десятым членом последовательности Фибоначчи, в нашем случае нужно минимум 9 рублей, чтобы заведомо угадать число.

Комментарий: числа Фибоначчи связаны с так называемым «золотым сечением». *Золотое сечение* (золотая пропорция) — это деление отрезка на две части в таком отношении, что длина всего отрезка относится к большей части так же, как большая часть относится к меньшей.

Это отношение часто обозначают греческой буквой Φ в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия. Если принять меньшую из частей за 1, то по определению большая часть равна Φ , и должна быть выполнена пропорция $(1 + \Phi)/\Phi = \Phi/1$. Значит, Φ — корень квадратного уравнения

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Взяв корень, который больше 1, получаем

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618.$$

При увеличении чисел Фибоначчи отношение двух соседних членов a_n/a_{n-1} всё ближе и ближе к числу Φ .

Например, $8/5 = 1,6$, $13/8 = 1,625$, $21/13 \approx 1,6154$, $34/21 \approx 1,619$, ... Попробуйте разобраться, почему это так! Заметим также, что многие связывают появление термина «золотое сечение» с гениальным художником и учёным Леонардо да Винчи.

Ответ: С.

99. Решим сначала более простую задачу. Пусть каждая монета может участвовать во взвешиваниях не более одного раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более лёгкую за n взвешиваний? Ясно, что если при каком-то взвешивании на чаше весов будет больше одной монеты, то из них выделить фальшивую монету не удастся, так как второй раз класть на весы эти монеты нельзя. Поэтому при каждом взвешивании на чаши кладётся по одной монете. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета очевидна, а если в равновесии, то количество подозрительных монет уменьшится на 2. Следовательно, при n взвешиваниях можно выделить фальшивую из $2n + 1$ монет.



Пусть теперь $f(n)$ — число монет, из которых можно выделить фальшивую за n взвешиваний в исходной задаче. Пусть при первом взвешивании на весах по k монет. Если весы окажутся не в равновесии, то осталось $n - 1$ взвешиваний, и придётся искать монету среди k монет, каждую из которых можно использовать не более одного раза. Поэтому $k \leq 2(n - 1) + 1 = 2n - 1$. Если же весы в равновесии, то получаем исходную задачу для $n - 1$ взвешиваний и $f(n) - 2k$ монет, не попавших на весы. Значит,

$$f(n) - 2k \leq f(n - 1).$$

$$\text{Отсюда } f(n) \leq f(n - 1) + 2k \leq f(n - 1) + 2(2n - 1).$$

Теперь последовательно применяем это же неравенство для $f(n - 1)$, $f(n - 2)$ и т. д. Получаем

$$\begin{aligned} f(n) &\leq f(n - 1) + 2(2n - 1) \leq \\ &\leq f(n - 2) + 2(2n - 3) + 2(2n - 1) \leq \dots \leq \\ &\leq f(1) + 2 \cdot 3 + \dots + 2(2n - 3) + 2(2n - 1). \end{aligned}$$

Так как $f(1) = 3$, имеем

$$\begin{aligned} f(n) &\leq 1 + 2 \cdot (1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)) = \\ &= 1 + 2n^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, если имеется $2n^2 + 1$ монет и на первом шаге взвешивать по $k = 2n - 1$ монет, на втором шаге в случае равенства по $k = 2n - 3$ других монет и т. д., то эксперт сможет выделить фальшивую монету за n взвешиваний. Значит, $f(n) = 2n^2 + 1$. При $n = 6$ получаем, что наибольшее число монет, из которых можно за 6 взвешиваний выделить фальшивую, равно 73.

Ответ: D.

100. Покажем, как можно раскрыть преступление за 8 дней! Для этого каждому участнику поставим в соответствие уникальный код — набор из нулей и единиц, в котором ровно 4 единицы и 4 нуля. Например, нам подойдёт набор $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$. Количество таких различных наборов равно числу способов выбрать четыре элемента из восьми (выбираем местоположение единиц в наборе), то есть равно

$$C_8^4 = 8! / (4! \cdot 4!) = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70.$$



Решения

Теперь в день k ($k = 1, 2, 3, \dots, 8$) вызовем тех и только тех участников, у которых на k -м месте в наборе стоит 1. Так как наборы уникальны и в каждом ровно 4 единицы, то в один из дней среди вызванных окажется свидетель, но не будет преступника, после чего преступление будет раскрыто!

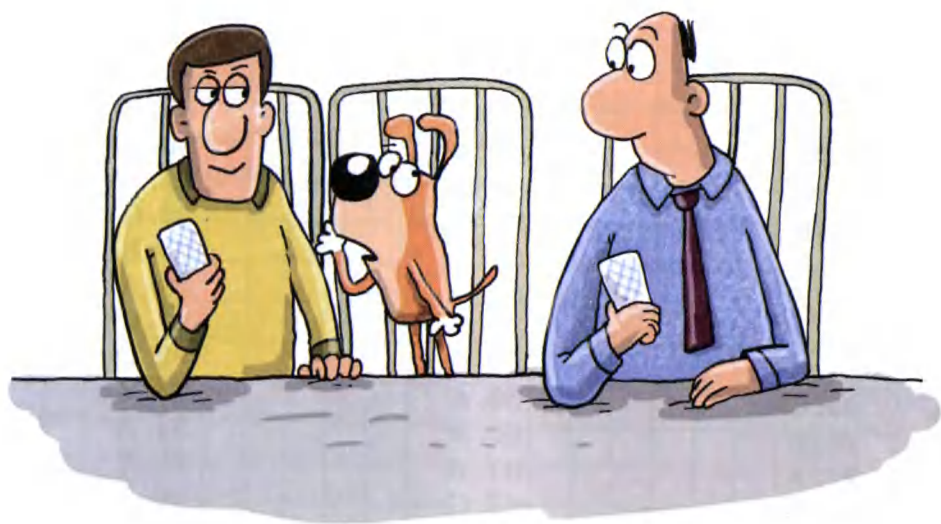
Доказательство минимальности (почему нельзя раскрыть преступление меньше чем за 8 дней) гораздо более сложное и опирается на следующую математическую теорему:

Теорема Шпернера

Пусть A — множество всех подмножеств некоторого n -элементного множества. Рассмотрим такое подмножество B множества A , что никакие два элемента из B не вложены друг в друга (такое подмножество B называется *антицепью*). Тогда максимальное число элементов, которое может содержать B , равно C_n^k , где k — наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$.

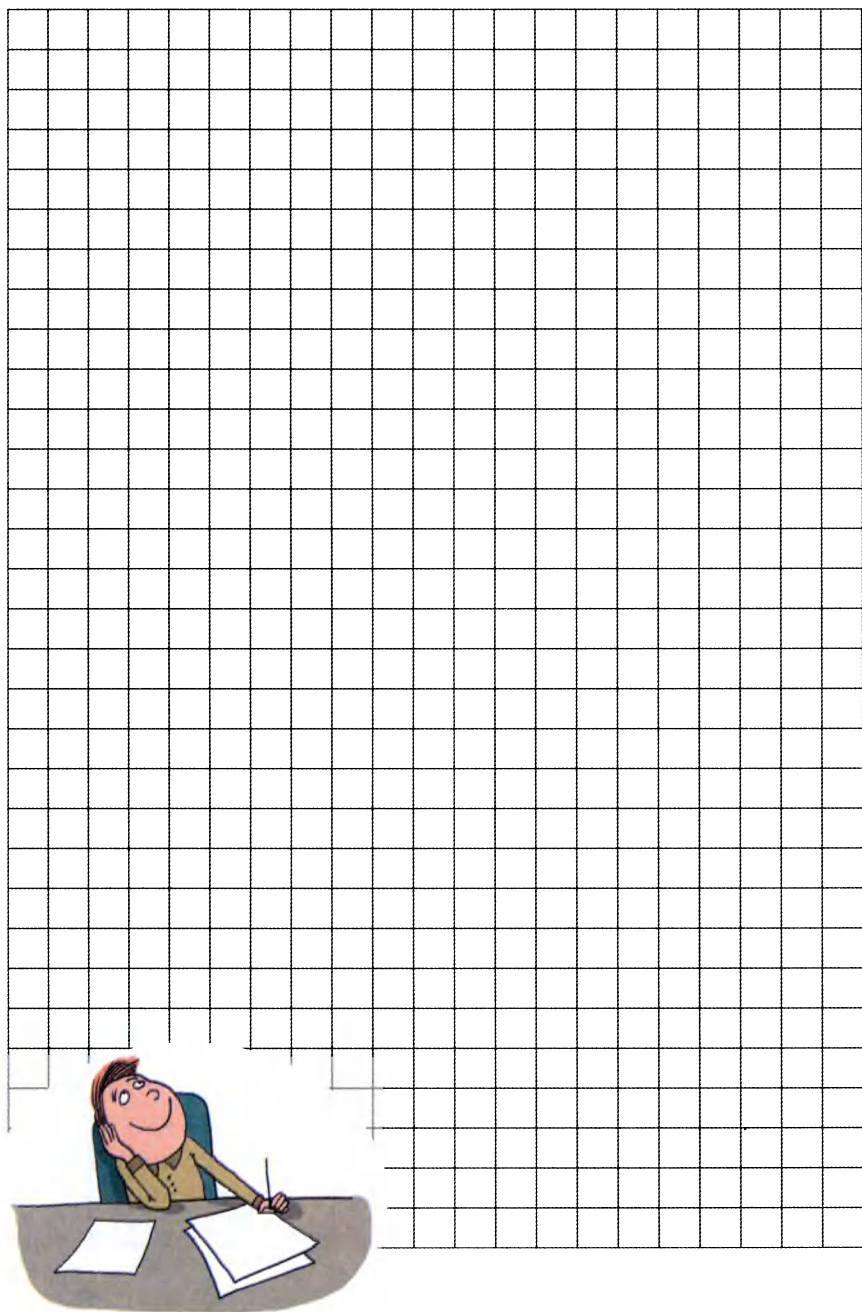
Ответ: А.

Отвѣты

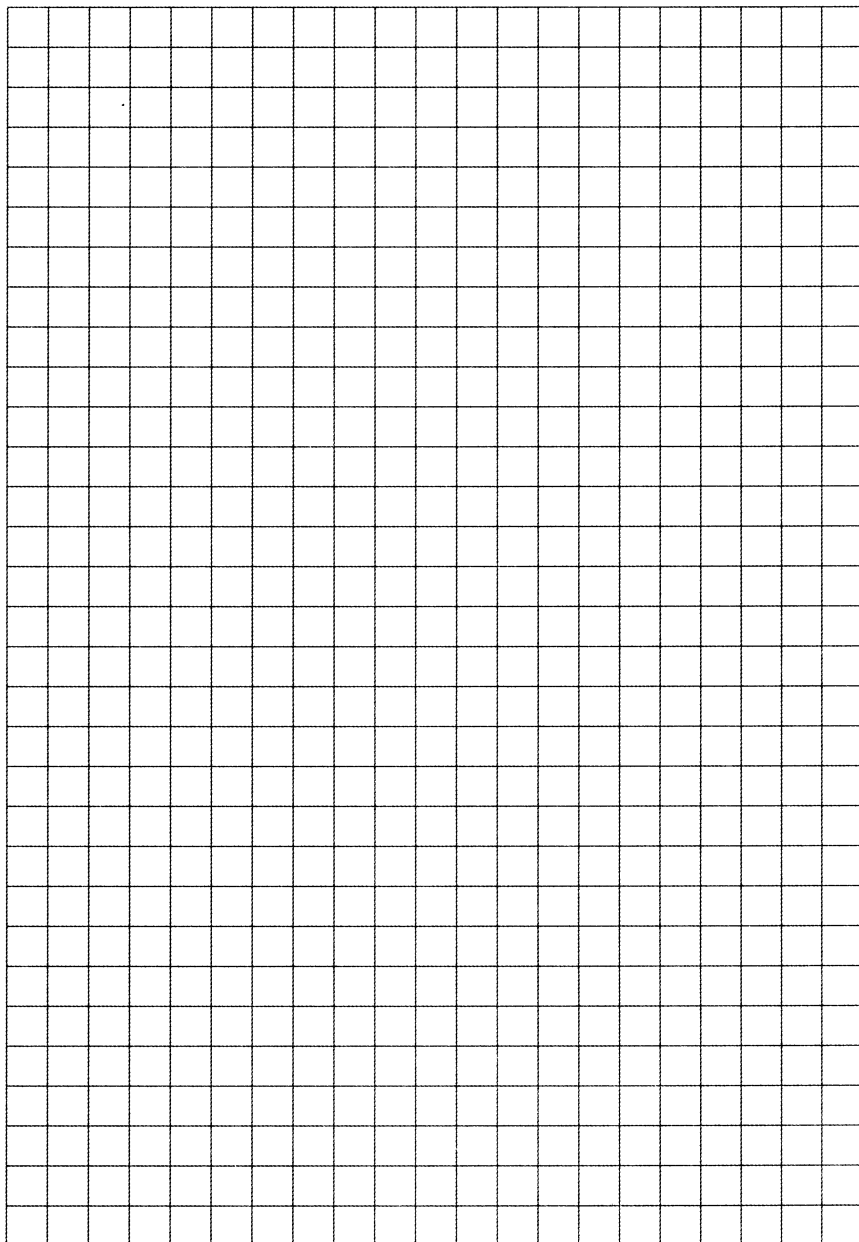


Ответы

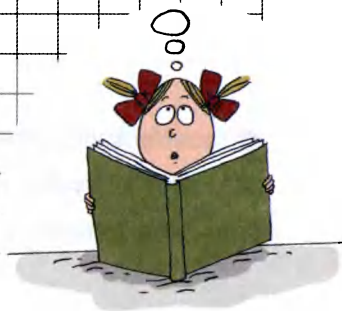
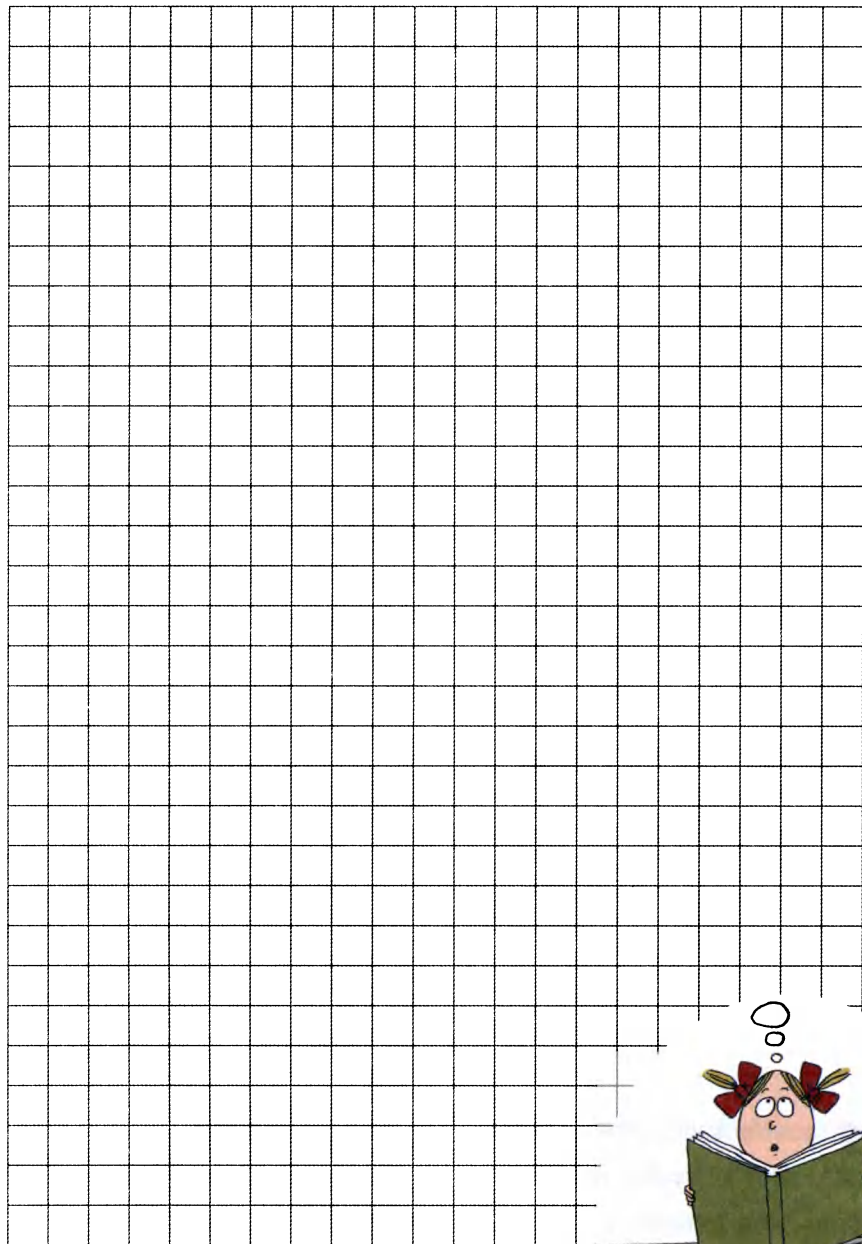
1. D	35. A	69. C
2. A	36. A	70. B
3. E	37. C	71. C
4. C	38. B	72. B
5. C	39. B	73. B
6. C	40. D	74. D
7. C	41. E	75. C
8. C	42. C	76. B
9. D	43. A	77. C
10. A	44. B	78. B
11. D	45. B	79. B
12. B	46. A	80. D
13. D	47. B	81. B
14. B	48. B	82. C
15. A	49. C	83. C
16. D	50. C	84. B
17. A	51. B	85. B
18. A	52. A	86. C
19. B	53. C	87. A
20. B	54. E	88. C
21. D	55. D	89. B
22. A	56. B	90. A
23. D	57. D	91. C
24. C	58. C	92. D
25. C	59. A	93. B
26. D	60. B	94. A
27. A	61. B	95. E
28. C	62. C	96. A
29. B	63. C	97. A
30. C	64. D	98. C
31. B	65. C	99. D
32. B	66. A	100. A
33. A	67. A	
34. A	68. B	



Для заметок



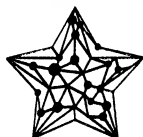
Для заметок



www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru

**ЖУРНАЛ
КВАНТИК**
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Лауреат IV Всероссийской премии
«За верность науке» в номинации
«Лучший детский проект о науке»

- КАК СКЛЕИТЬ ПИРАМИДКУ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКА?
- ЗАЧЕМ НУЖНЫ МАШИНКИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ РАЗМЕРОВ?
- ПОЧЕМУ ЗАПОТЕВШИЕ ОЧКИ ДЛЯ БЛИЗОРУКОСТИ
И ДЛЯ ДАЛЬНОЗОРКОСТИ ОТПОТЕВАЮТ ПО-РАЗНОМУ?
- НА КАКИХ ЯЗЫКАХ ГОВОРIT СТАРИК ХОТТАБЫЧ?

Все ответы знает «Квантик» —
ежемесячный научно-познавательный журнал
для школьников 5-8 классов

В журнале вы найдёте интересные статьи и задачи
по математике, лингвистике, физике и другим естествен-
ным наукам, сможете принять участие в математическом
конкурсе и конкурсе по русскому языку!

 facebook.com/kvantik12

 kvantik12.livejournal.com

 vk.com/kvantik12

 ok.ru/kvantik12

 twitter.com/kvantik_journal

 instagram.com/kvantik12

Подписаться на журнал «Квантик» можно
в отделениях Почты России по двум каталогам:

**КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ.ЖУРНАЛЫ»
АГЕНТСТВА РОСПЕЧАТЬ**

Индекс 80478 для подписки на год
Индекс 84252 для подписки
на полгода или несколько месяцев

КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ МАП

Индекс 11348 для подписки на год
Индекс 11346 для подписки
на полгода или несколько месяцев

По Каталогу Российской прессы
можно подписаться через
интернет на сайте vipishi.ru

Электронную версию журнала
приобретайте на сайте **litres.ru**

Всю продукцию «Квантика» — журналы, альманахи,
плакаты, календари загадок — можно купить
в магазине **«Математическая книга»** по адресу:
г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11,
а также в интернет-магазине **kvantik.ru**

Библиотечка журнала «Квантик»

Научно-популярное издание

М. А. Евдокимов

Сто граней математики

Художник Н. Н. Крутиков

Редактор Маховая И. А.

Верстальщик Асташкина В. Г.

Обложка Yustas-07

Подписано в печать 14.03.2018.

Формат 60х90/16. Уч.-изд. л. 11.

Гарнитура Школьная. Тираж 3000 экз.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга»:

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11.
Тел.: +7(495)745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

Отпечатано в ООО «Принт сервис групп»,
105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6.
Тел./факс: (499)785-05-18

ISBN 978-5-4439-1269-1



9 785443 912691 >